



Trụ sở chính

-  Số 3, phố Cầu Giấy, phường Láng Thượng, quận Đống Đa, tp Hà Nội
-  (84.24) 37663311
-  (84.24) 37669613
-  www.utc.edu.vn
-  dhgtvt@utc.edu.vn

Phân hiệu tại thành phố Hồ Chí Minh

-  Số 450-451, đường Lê Văn Việt, phường Tăng Nhơn Phú A, tp Thủ Đức, tp Hồ Chí Minh
-  (84.28) 38966798
-  (84.28) 38964736
-  phanhieu.utc.edu.vn
-  info@utc2.edu.vn



KỶ YẾU HỘI THẢO KHOA HỌC

GIẢNG DẠY VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CƠ BẢN NĂM 2025



KỶ YẾU
HỘI THẢO KHOA HỌC

GIẢNG DẠY VÀ
NGHIÊN CỨU
KHOA HỌC CƠ BẢN
NĂM 2025



NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI

TT	NỘI DUNG	Trang
29	TÌM HIỂU CÁC CÁCH DIỄN ĐẠT SO SÁNH TRONG TIẾNG PHÁP <i>Nguyễn Phương Lan</i>	290
30	VAI TRÒ TRÍ TUỆ NHÂN TẠO TRONG VIỆC THỨC ĐẨY PHƯƠNG PHÁP CÁ NHÂN HÓA HỌC TẬP <i>Nguyễn Quang Anh</i>	299
31	VIỆC HỌC TỪ VỰNG TIẾNG PHÁP CỦA SINH VIÊN CÁC LỚP PHÁP NGỮ TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI: THỰC TRẠNG VÀ GIẢI PHÁP <i>Trần Thị Chanh</i>	309
32	CẤU TRÚC ĐÔ MEN TỬ CỦA VẬT LIỆU MÀNG MỎNG YTTRIUM IRON GARNET <i>Quách Duy Trường</i>	316
33	CẤU TRÚC TINH THỂ, TÍNH CHẤT QUANG HỌC VÀ TÍNH CHẤT TỬ CỦA VẬT LIỆU $\text{BaTi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{O}_3$ ($x = 0 \div 0,5$) <i>Đào Việt Thắng, Nguyễn Mạnh Hùng</i>	321
34	CHẾ TẠO NANO BÁN DẪN ZnS:Mn BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÓA LÝ VÀ ĐỊNH HƯỚNG ỨNG DỤNG <i>Chu Tiến Dũng</i>	328
35	KHẢO SÁT ĐẶC TÍNH NHẠY KHÍ NH_3 CỦA VẬT LIỆU LAI HÓA NANOCOMPOSITE CNT@WO_3 <i>Nguyễn Tuấn Sơn</i>	335
36	TRẠNG THÁI NGỪNG TỤ POLARITON TRONG VI HỐC BÁN DẪN <i>Nguyễn Thị Hậu, Đỗ Thị Hồng Hải</i>	345
37	CẤU TRÚC HÓA HỌC CỦA MỘT SỐ HỢP CHẤT ĐƯỢC PHÂN LẬP TỪ CÂY CỎ XƯỚC (<i>Achyranthes Aspera</i>) <i>Hoàng Thị Tuyết Lan</i>	352
38	MỘT SỐ HỢP CHẤT FLAVONE C-GLYCOSIDE ĐƯỢC PHÂN LẬP TỪ LÁ CỦA LOÀI DÂY ĐAU XƯƠNG (<i>Tinospora sinensis</i>) VÀ HOẠT TÍNH KHÁNG VIÊM CỦA CHÚNG <i>Phạm Hồng Thoa, Bùi Thị Mai Anh</i>	360

TRẠNG THÁI NGƯNG TỤ POLARITON TRONG VI HỐC BÁN DẪN

Nguyễn Thị Hậu^{*,1,2}, Đỗ Thị Hồng Hải²

¹Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, 18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội

²Trường Đại học Mỏ - Địa chất, 18 Phố Viên, Bắc Từ Liêm, Hà Nội

*Email: nguyenthihau@humg.edu.vn; Tel: 0983572356

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát trạng thái ngưng tụ exciton-polariton trong vi hốc bán dẫn ở nhiệt độ $T = 0$. Cơ sở lý thuyết áp dụng gần đúng Hartree-Fock không giới hạn cho mô hình điện tử, lỗ trống và photon trong vi hốc bán dẫn để tính các tham số trật tự trạng thái ngưng tụ của hệ. Chúng tôi phân tích ảnh hưởng của tương tác Coulomb lên các tham số trật tự trạng thái ngưng tụ exciton và photon ứng với tham số điều chỉnh được chọn phù hợp cho hệ bán dẫn. Tùy thuộc vào tham số điều chỉnh, tương tác Coulomb và mật độ kích thích, hệ có thể ở trạng thái ngưng tụ exciton-polariton hoặc photon.

Từ khóa: exciton, polariton, vi hốc bán dẫn, Hartree-Fock.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Polariton trong vi hốc bán dẫn là một giả hạt, xuất hiện do sự ghép cặp giữa photon trong vi hốc và exciton bị giam cầm trong một giếng lượng tử bán dẫn [1]. Sự lai ghép này dẫn đến sự hình thành trạng thái lượng tử mới với các tính chất quang học và vật lý độc đáo, đặc biệt trong các cấu trúc vi hốc (microcavity). Nhờ khả năng kết hợp giữa tính chất nhẹ của photon và tính tương tác mạnh của exciton, polariton thể hiện các hiệu ứng vật lý quan trọng như ngưng tụ Bose-Einstein (BEC) [2-4] và pha siêu lỏng [5]. Với những tính chất này, Polariton mở ra nhiều ứng dụng tiềm năng trong các lĩnh vực như laser tiêu thụ năng lượng thấp, thông tin lượng tử, cảm biến quang học,... [6-9].

Trong thời gian qua, nghiên cứu về polariton đã phát triển mạnh mẽ cả về lý thuyết và thực nghiệm. Các mô hình lý thuyết đã được phát triển nhằm mô tả động lực học của polariton, sự hình thành ngưng tụ Bose-Einstein, cũng như các hiệu ứng phi tuyến trong hệ nhiều hạt [10-12]. Mặt khác, các thí nghiệm với cấu trúc vi hốc và siêu mạng bán dẫn đã xác nhận nhiều dự đoán lý thuyết, đồng thời mở ra các hướng nghiên cứu mới về điều khiển và ứng dụng hệ polariton trong điều kiện thực tế [13-15]. Do đó, nghiên cứu chi tiết về ngưng tụ polariton trong cấu trúc vi hốc bán dẫn là hết sức cần thiết.

Trong bài báo này, chúng tôi tiến hành khảo sát trạng thái ngưng tụ của polariton trong vi hốc bán dẫn thông qua khảo sát các tham số trật tự trạng thái ngưng tụ tại các giá trị tương tác Coulomb khác nhau. Thông qua mô hình lý thuyết và tính số, chúng tôi lựa chọn các thông số phù hợp để đánh giá ảnh hưởng của tương tác Coulomb lên sự hình thành và ổn định của các pha ngưng tụ trong hệ. Trong phần 2, chúng tôi trình bày cơ sở lý thuyết của mô hình hệ điện tử, lỗ trống và photon trong vi hốc bán dẫn. Các kết quả tính số và thảo luận được chúng tôi trình bày trong phần 3, và phần 4 là các kết luận.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Trong không gian xung lượng, Hamiltonian mô tả hệ điện tử, lỗ trống và photon trong vi hốc bán dẫn có dạng:

$$H = H_{eh} + H_{ph} + H_{int} \quad (1)$$

trong đó, H_{eh} và H_{ph} lần lượt mô tả phần không tương tác của hệ điện tử, lỗ trống và photon có dạng:

$$H_{eh} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\varepsilon_{\mathbf{k}}^e e_{\mathbf{k}}^\dagger e_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}}^h h_{\mathbf{k}}^\dagger h_{\mathbf{k}} \right) \quad (2)$$

$$H_{ph} = \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{q}}^\dagger \psi_{\mathbf{q}} \quad (3)$$

với $e_{\mathbf{k}}^\dagger (e_{\mathbf{k}})$ và $h_{\mathbf{k}}^\dagger (h_{\mathbf{k}})$ lần lượt là toán tử sinh (hủy) của điện tử e và lỗ trống h mang xung lượng $\mathbf{k}$. $\varepsilon_{\mathbf{k}}^e (\varepsilon_{\mathbf{k}}^h)$ và $\omega_{\mathbf{q}}$ lần lượt là năng lượng tán sắc của điện tử (lỗ trống) không tương tác mang xung $\mathbf{k}$ và photon mang xung lượng $\mathbf{q}$ được cho bởi:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{e(h)} = -2t \sum_i^D \cos k_i + \frac{E_g + 4tD - \mu}{2} \quad (4)$$

$$\omega_{\mathbf{q}} = \sqrt{(c\mathbf{q})^2 + \omega_c^2} - \mu \quad (5)$$

trong phương trình (4) t là tích phân nhảy nút, D là số chiều của mạng tinh thể. Trong bài báo này, để đơn giản chúng tôi giả sử tích phân nhảy nút của điện tử là lỗ trống là như nhau ($t = 1$) [16 - 18], và coi hệ điện tử-lỗ trống trong giếng lượng tử là hệ hai chiều ($D = 2$). E_g là khoảng cách từ đáy của dải dẫn tới đỉnh của dải hóa trị, khi $E_g < 0$ hệ ở trạng thái bán kim loại, trong khi nếu $E_g > 0$, hệ ở trạng thái bán dẫn. Trong biểu thức (5) ω_c là năng lượng của photon tại xung lượng $\mathbf{q} = 0$ và c và vận tốc ánh sáng trong vi hốc, μ là thế hóa học.

Số hạng H_{int} trong Hamiltonian (1) mô tả các tương tác trong hệ, bao gồm tương tác Coulomb giữa các điện tử - lỗ trống với cường độ tương tác U và tương tác điện tử - lỗ trống - photon với cường độ tương tác g được biểu diễn dưới dạng:

$$H_{int} = -\frac{U}{N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} e_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^\dagger e_{\mathbf{k}_1} h_{-\mathbf{k}+\mathbf{k}_2}^\dagger h_{\mathbf{k}_2} - \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} (e_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger h_{-\mathbf{k}}^\dagger \psi_{\mathbf{q}} + h_{-\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{q}}^\dagger) \quad (6)$$

với N là số nút mạng trong giếng lượng tử. Có thể thấy, ảnh hưởng của tương tác điện tử - lỗ trống - photon trở nên đáng kể nhất khi năng lượng kích thích của một cặp điện tử - lỗ trống xấp xỉ bằng năng lượng kích thích của photon. Do đó, để thuận tiện trong việc mô tả hiện tượng này, người ta thường sử dụng một đại lượng gọi là tham số điều chỉnh (detuning parameter) [19], được coi như một tham số của mô hình và được xác định theo công thức:

$$d = \omega_c - E_g \quad (7)$$

Để khảo sát các trạng thái ngưng tụ trong hệ mô tả bởi Hamiltonian (1), chúng tôi sử dụng gần đúng Hartree-Fock không giới hạn (Unrestricted Hartree-Fock - UHF), bỏ qua các thăng giáng của Hamiltonian tương tác trong công thức (6), Hamiltonian hiệu dụng trong gần đúng UHF được viết dưới dạng:

$$\mathcal{H}_{UHF} = \sum_{\mathbf{k}} \bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^e e_{\mathbf{k}}^\dagger e_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^h h_{\mathbf{k}}^\dagger h_{\mathbf{k}} + \Delta \sum_{\mathbf{k}} (e_{\mathbf{k}}^\dagger h_{-\mathbf{k}}^\dagger + H.c) + \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{q}}^\dagger \psi_{\mathbf{q}} + (\sqrt{N} \Lambda \psi_0^\dagger + H.c) \quad (8)$$

trong đó $\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^e$ và $\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^h$ là các năng lượng tán sắc tái chuẩn hóa khi có đóng góp của độ dịch Hartree-Fock có dạng:

$$\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^e = \varepsilon_{\mathbf{k}}^e - \frac{U}{N} \sum_{\mathbf{q}} \langle h_{\mathbf{q}}^\dagger h_{\mathbf{q}} \rangle \quad (9)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^h = \varepsilon_{\mathbf{k}}^h - \frac{U}{N} \sum_{\mathbf{q}} \langle e_{\mathbf{q}}^\dagger e_{\mathbf{q}} \rangle \quad (10)$$

và

$$\Delta = -\frac{g}{\sqrt{N}} \langle \psi_0 \rangle - \frac{U}{N} \sum_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}} \quad (11)$$

$$\Lambda = -\frac{g}{N} \sum_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}} \quad (12)$$

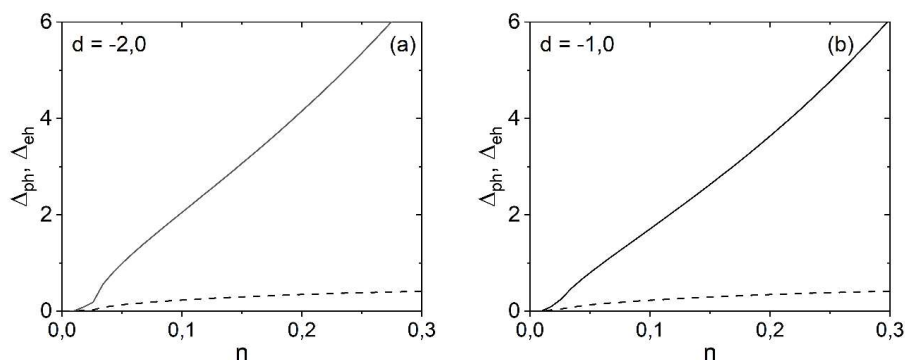
với $d_{\mathbf{k}} = \langle e_{\mathbf{k}}^\dagger h_{-\mathbf{k}}^\dagger \rangle = \langle h_{-\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}} \rangle = d_{\mathbf{k}}^*$ là mật độ exciton ở trạng thái xung lượng $\mathbf{k}$, biểu diễn xác suất ghép cặp giữa điện tử và lỗ trống, $\langle \psi_0 \rangle$ là giá trị trung bình của trường photon ở xung lượng không ($\mathbf{q} = 0$), đại diện cho sự phân cực của photon trong hệ. Trong trạng

thái ngưng tụ của hệ, cả tham số d_k và $\langle \psi_0 \rangle$ đều khác không hay nói cách khác là giá trị khác không của Δ đặc trưng cho pha ngưng tụ của hệ. Tùy thuộc vào sự cạnh tranh giữa các tham số trật tự trạng thái ngưng tụ exciton ($\Delta_{eh} = -\frac{U}{N} \sum_k d_k$) và tham số trật tự trạng thái ngưng tụ photon ($\Delta_{ph} = -\frac{g}{\sqrt{N}} \langle \psi_0 \rangle$) trong phương trình (11) mà hệ có thể tồn tại ở trạng thái ngưng tụ exciton, polariton hay là photon. Sử dụng phép biến đổi Bogoliubov để chéo hóa hoàn toàn Hamiltonian trong phương trình (8), từ đó thu được các giá trị kì vọng của tham số trật tự trạng thái ngưng tụ trong phương trình (11) [18].

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Trong phần này, chúng tôi trình bày kết quả tính số của các kết quả giải tích trong phần 2 cho một hệ với $N=200 \times 200$ nút mạng. Không làm mất tính tổng quát, chúng tôi cố định một số tham số cố định với hằng số tương tác điện tử, lỗ trống - photon $g = 0,1$ và năng lượng của photon tại xung lượng $q = 0$ là $\omega_c = 0,8$, đồng thời chọn $t = 1$ là đơn vị của năng lượng. Các khảo sát về tham số điều chỉnh có giá trị lớn đã được nghiên cứu khá chi tiết trong công trình [10], do đó trong bài báo này chúng tôi khảo sát tham số trật tự trạng thái ngưng tụ theo mật độ kích thích ứng với các giá trị của tham số điều chỉnh nhỏ ($d = -1,0$ và $d = -2,0$), đồng thời xem xét sự ảnh hưởng của thể tương tác Coulomb lên trạng thái ngưng tụ của hệ trong các trường hợp này. Các giá trị của tham số điều chỉnh được chọn để thể hiện hệ ở trạng thái bán dẫn, phù hợp để nghiên cứu về trạng thái ngưng tụ của polariton trong các vi hốc bán dẫn.

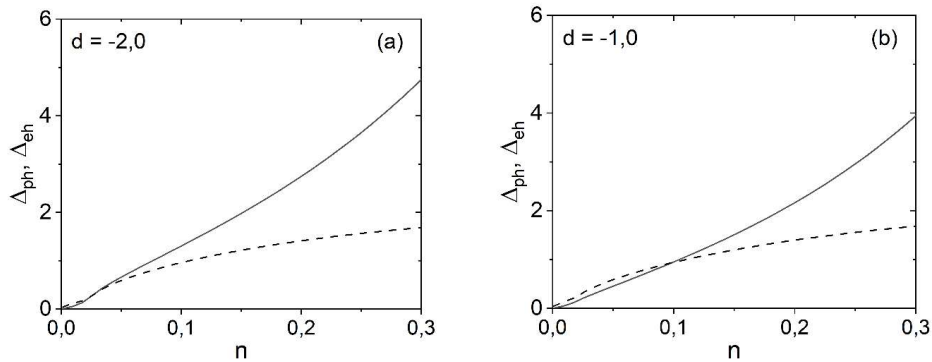
Trước tiên, chúng tôi khảo sát tại giá trị thể tương tác Coulomb nhỏ, cụ thể trên Hình 1 chúng tôi trình bày kết quả khảo sát tham số trật tự trạng thái ngưng tụ theo mật độ hạt kích thích tại $U = 1,0$ ứng với hai giá trị của tham số điều chỉnh $d = -2,0$ và $d = -1,0$.



Hình 1. Tham số trật tự trạng thái ngưng tụ exciton Δ_{eh} (nét đứt) và photon Δ_{ph} (nét liền) theo mật độ trạng thái kích thích ứng với hai giá trị khác nhau của tham số điều chỉnh $d = -2,0$ (a) và $d = -1,0$ (b) tại $U = 1,0$.

Kết quả trên Hình 1 cho thấy cả hai tham số trật tự trạng thái ngưng tụ khác không khi mật độ kích thích ở giá trị khác không. Nhìn vào sự cạnh tranh giữa tham số trạng thái ngưng tụ exciton Δ_{eh} và photon Δ_{ph} chúng tôi thấy sự chiếm ưu thế của tham số trật tự trạng thái ngưng tụ photon ngay cả khi mật độ kích thích nhỏ. Tăng mật độ kích thích, Δ_{eh} tăng chậm trong khi Δ_{ph} tăng rất nhanh, thể hiện hệ ổn định trong trạng thái ngưng tụ photon. Điều này có thể giải thích được do khi hệ ở trong pha bán dẫn, thể tương tác Coulomb yếu dẫn đến việc khó hình thành liên kết điện tử - lỗ trống tạo thành exciton nên Δ_{eh} có giá trị rất nhỏ và tăng chậm khi tăng mật độ kích thích. So sánh giữa Hình 1a và Hình 1b chúng tôi thấy khi tham số điều chỉnh d giảm từ $d = -1,0$ xuống $d = -2,0$, Δ_{eh} gần như không thay đổi, trong khi Δ_{ph} tăng rõ rệt. Tham số điều chỉnh giảm tương ứng với tăng khoảng cách từ đáy của dải dẫn tới đỉnh của dải hóa trị, có nghĩa là mức năng lượng photon tiến gần hơn đến năng lượng vùng cấm của exciton, tham số trạng thái ngưng tụ photon tăng lên. Thế hóa cũng nhanh chóng tiến gần tới đáy của dải photon hơn làm quá trình ngưng tụ photon diễn ra dễ dàng hơn.

Tiếp theo, trong Hình 2 chúng tôi tăng giá trị thể tương tác Coulomb lên $U = 4,0$ và tiếp tục xem xét sự cạnh tranh pha ngưng tụ giữa exciton và photon. Có thể thấy các tham số trật tự trạng thái ngưng tụ khác không ngay ở mật độ kích thích vô cùng nhỏ. Khi $d = -1,0$ thể tương tác Coulomb lớn hỗ trợ sự ghép cặp điện tử - lỗ trống tạo thành exciton, do đó Δ_{eh} tăng nhanh và có giá trị lớn hơn Δ_{ph} ở mật độ kích thích nhỏ, thể hiện hệ tồn tại trong pha ngưng tụ exciton - polariton. Tăng mật độ kích thích làm tham số trật tự photon tăng nhanh trong khi đó Δ_{eh} có xu hướng bão hòa, do đó hệ dần chuyển sang pha ngưng tụ photon khi mật độ hạt đủ lớn.



Hình 2. Tham số trật tự trạng thái ngưng tụ exciton Δ_{eh} (nét đứt) và photon Δ_{ph} (nét liền) theo mật độ trạng thái kích thích ứng với hai giá trị khác nhau của tham số điều chỉnh $d = -2,0$ (a) và $d = -1,0$ (b) tại $U = 4,0$.

Với $d = -2,0$ bức tranh chuyển pha xảy ra tương tự, nhưng do tham số trạng thái ngưng tụ photon được tăng cường do đó pha ngưng tụ polariton thu hẹp về phía mật độ thấp.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã khảo sát các trạng thái ngưng tụ của polariton trong vi hốc bán dẫn ở tương tác coulomb yếu và mạnh. Bằng việc sử dụng phương pháp gần đúng hartree-fock không giới hạn cho mô hình điện tử, lỗ trống và photon trong vi hốc bán dẫn để tính các tham số trật tự trạng thái ngưng tụ của hệ. Từ kết quả tính số, chúng tôi đã xây dựng được các giản đồ pha thể hiện ảnh hưởng của thể tương tác coulomb lên sự hình thành và tính chất của trạng thái ngưng tụ trong hệ. Ở chế độ tương tác yếu, hệ tồn tại trong pha ngưng tụ photon. Ở chế độ tương tác mạnh thể hiện một pha phức tạp hơn, ở mật độ kích thích nhỏ hệ tồn tại trong pha ngưng tụ exciton-polariton và hệ chuyển dần sang pha ngưng tụ photon khi mật độ kích thích tăng. Nghiên cứu sâu hơn về động lực học của quá trình chuyển pha ngưng tụ polariton sẽ được đề xuất cho các nghiên cứu tiếp theo của chúng tôi.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. C. Weisbuch, N. Nishioka, A. Ishikawa, Y. Arakawa, Observation of the coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor quantum microcavity, *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992) 3314-3317.
- [2]. R. Su, S. Ghosh, J. Wang, S. Liu, C. Diederichs, T. C. H. Liew, and Q. Xiong, Observation of exciton polariton condensation in a perovskite lattice at room temperature, *Nat. Phys.* 16 (2020), 301.
- [3]. T. Byrnes, N. Y. Kim, and Y. Yamamoto, Exciton-polariton condensates, *Nat. Phys.* 10 (2014), 803.
- [4]. C. Anton-Solanas, M. Waldberr, M. Klaas, H. Suchomel, T. H. Harder, H. Cai, E. Sedov, S. Klemmt, A. V. Kavokin, S. Tongay, K. Watanabe, T. Taniguchi, S. Höfling, and C. Schneider, Bosonic condensation of exciton-polaritons in an atomically thin crystal, *Nat. Mat.* 20 (2021), 1233-1239. doi: [10.1038/s41563-021-01000-8](https://doi.org/10.1038/s41563-021-01000-8)
- [5]. I. Carusotto and C. Ciuti, Quantum fluids of light, *Rev. Mod. Phys.* 85 (2013), 299. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.299>.
- [6]. D. Sanvitto; S. Kéna-Cohen, The road towards polaritonic devices. *Nat. Mat.* 15 (2016), 1061-73. doi: [10.1038/nmat4668](https://doi.org/10.1038/nmat4668).
- [7]. M. Lindemann, G. F. Xu, T. Pusch, R. Michalzik, M. R. Hofmann, I. Žutić, N. C. Gerhardt, Ultrafast spin-lasers. *Nature* 568 (2019), 212-215. doi: [10.1038/s41586-019-1073-y](https://doi.org/10.1038/s41586-019-1073-y).
- [8]. F. R. Hu, Z. Fei, Recent progress on exciton polaritons in layered transition-metal dichalcogenides. *Adv. Opt. Mater.* 8 (2020), 1901003. <https://doi.org/10.1002/adom.201901003>.
- [9]. S. Latini, E. Ronca, U. De Giovannini, H. Hübener, A. Rubio, Cavity control of excitons in two-dimensional materials. *Nano Lett.* 19 (2019), 3473-3479. doi: [10.1021/acs.nanolett.9b00183](https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.9b00183)

- [10]. Q.-H. Ninh and V.-N. Phan, BCS-BEC crossovers of microcavity exciton-polariton condensates, *Physica B* 573 (2019), 72. <https://doi.org/10.1016/j.physb.2019.08.027>
- [11]. T. D. Doan, D. B. Tran Thoai, and H. Haug, Kinetics and luminescence of the excitations of a nonequilibrium polariton condensate, *Phys. Rev. B* 102 (2020), 165126. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.102.165126>
- [12]. G.P. Martins, O.L. Berman, and G. Gumbs, Polaritonic and excitonic semiclassical time crystals based on TMDC strips in an external periodic potential. *Sci Rep* 13 (2023), 19707. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-46077-0>.
- [13]. M. Pieczarka, M. Gębski, A. N. Piasecka, J. A. Lott, A. Pelster, M. Wasiak and T. Czyszanowski, Bose-Einstein condensation of photons in a vertical-cavity surface-emitting laser, *Nature Photonics*, Vol. 18 (2024), 1090-1096. <https://doi.org/10.1038/s41566-024-01478-z>
- [14]. A. Delphan, et al, Polariton lasing in AlGaIn microring with GaN/AlGaIn quantum wells, *APL Photonics* 8 (2023), 021302. <https://doi.org/10.1063/5.0132170>
- [15]. H. A. Fernandez, F. Withers, S. Russo, and W. L. Barnes, Electrically Tuneable Exciton-Polaritons through Free Electron Doping in Monolayer WS₂ Microcavities, *Adv. Optical Mater.* 7 (2019), 1900484. doi: 10.1002/adom.201900484
- [16]. F. M. Marchetti, B. D. Simons, and P. B. Littlewood, Condensation of cavity polaritons in a disordered environment, *Phys. Rev. B* 70 (2004), 155327. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.70.155327>
- [17]. T. Byrnes, T. Horikiri, N. Ishida, and Y. Yamamoto, BCS Wave-Function Approach to the BEC-BCS Crossover of Exciton-Polariton Condensates, *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010), 186402. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.186402>
- [18]. B.-D. Hoi and V.-N. Phan, Thermal fluctuations in a system of microcavity exciton-polariton condensations, *Phys. Status Solidi B* 254 (2016), 1-7. doi: 10.1002/pssb.201600359
- [19]. K. Kamide and T. Ogawa, Ground-state properties of microcavity polariton condensates at arbitrary excitation density, *Phys. Rev. B* 83 (2011), 165319. doi: 10.1103/PhysRevB.83.165319.