

Tính toán dao động của ô tô có chứa đạo hàm cấp ba sử dụng phương pháp Newmark

Bùi Thị Thúy*

* Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Dao động của ô tô sinh ra trong quá trình chuyển động ảnh hưởng đến đường, bản thân xe và người ngồi trên xe. Báo cáo nghiên cứu phương trình vi phân dao động có chứa đạo hàm cấp ba của ô tô sử dụng phương pháp Newmark (Newmark, 1959). Trong báo cáo, phương trình vi phân dao động được thiết lập và nghiệm số được xác định. Sau đó, khảo sát dao động của ô tô dưới tác động của lực kích động điều hòa.

Từ khóa: đạo hàm cấp ba; dao động ô tô; phương pháp Newmark

1. Mở đầu

Ô tô là một trong các phương tiện vận tải có vai trò rất quan trọng trong tất cả các lĩnh vực kinh tế và đời sống. Dao động ô tô không những ảnh hưởng tới con người (lái xe và hành khách), hàng hóa chuyên chở, độ bền, độ an toàn chuyển động của ô tô mà còn ảnh hưởng đến tuổi thọ của đường. Đặc biệt trong quá trình chuyển động, khi ô tô dao động làm phát sinh tải trọng động rất lớn tác động lên hệ thống khung vỏ của ô tô, các chi tiết, cơ cấu tổng thành... ảnh hưởng đến độ bền và tuổi thọ của chúng (Hồ Quốc Khánh, 2019; M. Geradin and D. Rixen, 1994; Nguyễn Văn Khang, 2023). Do đó, việc nghiên cứu dao động của ô tô là cần thiết và hữu ích. Một trong những công việc quan trọng của nghiên cứu dao động ô tô là thiết lập và giải phương trình vi phân để xác định các thông số dao động.

Báo cáo gồm 5 phần. Phần 2 trình bày phương pháp Newmark cho phương trình vi phân cấp ba. Dựa trên định luật II Newton và phương pháp Newmark, phương trình vi phân chuyển động của ô tô được thiết lập và nghiệm số được xác định trong phần 3. Phần 4 trình bày ví dụ số và đồ thị dao động của ô tô dưới tác dụng của lực kích động điều hòa. Phần 5 bao gồm các kết luận chính của báo cáo.

2. Phương pháp Newmark giải phương trình vi phân cấp 3

Ta xây dựng phương pháp giải hệ phương trình vi phân cấp ba dựa trên phương pháp Newmark đã có giải hệ phương trình vi phân cấp hai (N.M. Newmark, 1959; Bùi Thị Thúy, 2017; Đinh Văn Phong, 2006). Trong đó véc tơ trạng thái của hệ ở thời điểm $t_{n+1} = t_n + h$ được suy ra từ véc tơ trạng thái đã biết ở thời điểm t_n qua các khai triển Taylor của dịch chuyển, vận tốc và gia tốc.

Sử dụng khai triển Taylor đối với độ dịch chuyển, vận tốc và gia tốc tại thời điểm t_{n+1} ta có các công thức:

$$\ddot{x}_{n+1} = \ddot{x}_n + (1 - \alpha)h\ddot{\ddot{x}}_n + \alpha h\ddot{\ddot{x}}_{n+1} \quad (1)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + h\ddot{x}_n + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)h^2\ddot{\ddot{x}}_n + \gamma h^2\ddot{\ddot{x}}_{n+1} \quad (2)$$

$$x_{n+1} = x_n + h\dot{x}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{x}_n + \left(\frac{1}{6} - \beta\right)h^3\ddot{\ddot{x}}_n + \beta h^3\ddot{\ddot{x}}_{n+1} \quad (3)$$

Với α, β, γ là các tham số liên quan đến sơ đồ cầu phương.

Giả sử ta có phương trình dao động tuyến tính của vật có dạng

$$a_1\ddot{\ddot{x}} + a_2\ddot{x} + a_3\dot{x} + a_4x = f(t)$$

Trong đó a_1, a_2, a_3, a_4 là các hằng số. Áp dụng các công thức (1-3) vào phương trình trên tại thời

* Tác giả liên hệ

Email: buithithuy@humg.edu.vn

điểm t_{n+1} ta tính được $\ddot{x}_{n+1}$

$$\begin{aligned} \left[a_1 + \alpha h a_2 + \gamma h^2 a_3 + \beta h^3 a_4 \right] \ddot{x}_{n+1} = f_{n+1} - a_2 \left[\dot{x}_n + (1 - \alpha) h \ddot{x}_n \right] - a_3 \left[\dot{x}_n + h \ddot{x}_n + \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) h^2 \ddot{x}_n \right] \\ - a_4 \left[x_n + h \dot{x}_n + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_n + \left(\frac{1}{6} - \beta \right) h^3 \ddot{x}_n \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Giải phương trình (4) ta được $\ddot{x}_{n+1}$. Sử dụng các công thức Newmark (1) - (3) ta nhận được giá trị của gia tốc, vận tốc và độ dịch chuyển $\ddot{x}_{n+1}$, $\dot{x}_{n+1}$ và x_{n+1} .

Xác định điều kiện ban đầu của $\ddot{x}(t_0)$ từ điều kiện ban đầu của $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$ và $\ddot{x}(t_0)$ đã cho:

$$\ddot{x}(t_0) = \frac{1}{a_1} \left[f(t_0) - a_2 \ddot{x}(t_0) - a_3 \dot{x}(t_0) - a_4 x(t_0) \right] \quad (5)$$

3. Tính toán dao động của ô tô có chứa đạo hàm cấp ba sử dụng phương pháp Newmark

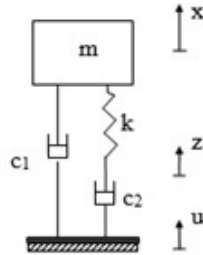
3.1. Thiết lập phương trình vi phân dao động của ô tô

Gọi x và u là dịch chuyển của vật và bánh xe. Giả thiết độ cứng của lò xo có thể được biểu diễn bằng một lò xo tương đương với độ cứng k với độ dịch chuyển được ký hiệu là z .

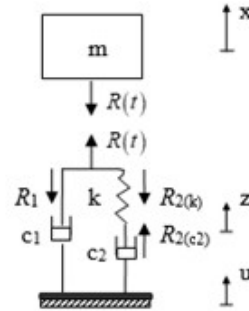
Ta có định luật 2 Newton:

$$m\ddot{x} = -R(t), \quad (6)$$

Trong đó m là khối lượng của vật, $x(t)$ là độ dịch chuyển, $R(t)$ là nội lực sinh ra bên trong vật thể đàn nhớt.



Hình 1. Mô hình ô tô cấp nguyên.



Hình 2. Phân tích lực.

Giá trị lực $R(t)$ bằng tổng giá trị lực R_1 tác dụng lên giảm chấn c_1 và lực R_2 tác dụng lên lò xo k hay giảm chấn c_2 :

$$R(t) = R_1 + R_2, \quad (7)$$

$$R_2 = R_{2(k)} = R_{2(c_2)}, \quad (8)$$

Trong đó:

$$R_1 = c_1(\dot{x} - \dot{u}), \quad R_{2(k)} = k(x - z), \quad R_{2(c)} = c_2(\dot{z} - \dot{u}), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R(t) = R_1 + R_2 &= R_1 + R_{2(k)} \\ &= c_1(\dot{x} - \dot{u}) + k(x - z), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{Từ phương trình (8) và (9) ta có: } k(x - z) = c_2(\dot{z} - \dot{u}) \quad (11)$$

Thay (10) vào (1) ta có phương trình chuyển động:

$$m\ddot{x} = -c_1(\dot{x} - \dot{u}) - k(x - z), \quad (12)$$

Rút z từ phương trình trên:

$$z = \frac{m\ddot{x} + c_1(\dot{x} - \dot{u})}{k} + x = \frac{m\ddot{x} + c_1\dot{x} + kx - c_1\dot{u}}{k}, \quad (13)$$

Từ phương trình (13) và (11) ta được phương trình vi phân:

$$\begin{aligned}
k(x-z) &= c_2(\dot{z}-\dot{u}), \\
\Leftrightarrow -m\ddot{x} - c_1\dot{x} + c_1\dot{u} &= c_2\left(\frac{m\ddot{x} + c_1\dot{x} + k\dot{x} - c_1\ddot{u}}{k}\right) - c_2\dot{u}, \\
\Leftrightarrow \frac{c_2}{k}m\ddot{x} + m\ddot{x} + \frac{c_1c_2}{k}\ddot{x} + (c_1+c_2)\dot{x} &= \frac{c_1c_2}{k}\ddot{u} + (c_1+c_2)\dot{u}, \\
\Leftrightarrow \ddot{x} + \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m}\right)\ddot{x} + \frac{k(c_1+c_2)}{mc_2}\dot{x} &= \frac{c_1}{m}\ddot{u} + \frac{k(c_1+c_2)}{mc_2}\dot{u}.
\end{aligned} \tag{14}$$

3.2. Phương pháp Newmark giải phương trình vi phân dao động

Ta có phương trình vi phân dao động cấp nguyên của ô tô:

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m}\right)\ddot{x} + \frac{k(c_1+c_2)}{mc_2}\dot{x} = \frac{c_1}{m}\ddot{u} + \frac{k(c_1+c_2)}{mc_2}\dot{u}. \tag{15}$$

Áp dụng phương pháp Newmark đối với phương trình vi phân cấp 3 ở phần 2, ta giải phương trình vi phân dao động trên.

Tại thời điểm t_n phương trình chuyển động của hệ có dạng:

$$\ddot{x}(t_n) + \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m}\right)\ddot{x}(t_n) + \frac{k(c_1+c_2)}{mc_2}\dot{x}(t_n) = \frac{c_1}{m}\ddot{u}(t_n) + \frac{k(c_1+c_2)}{mc_2}\dot{u}(t_n). \tag{16}$$

Với $x(t_n)$, $\dot{x}(t_n)$ và $\ddot{x}(t_n)$ lần lượt là độ dịch chuyển, vận tốc và gia tốc tại thời điểm t_n .

Từ phương trình (1), (2) và (3), ta có các xấp xỉ Newmark của $\dot{x}_n$, $\ddot{x}_n$, $\ddot{x}_n$ như sau:

$$\dot{x}_n = \frac{\gamma}{\beta h}(x_n - x_{n-1}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)h\ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{6\beta}\right)h^2\ddot{x}_{n-1}, \tag{17}$$

$$\ddot{x}_n = \frac{\alpha}{\beta h^2}(x_n - x_{n-1}) - \frac{\alpha}{\beta h}\dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right)\ddot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{6\beta}\right)h\ddot{x}_{n-1}, \tag{18}$$

$$\ddot{x}_n = \frac{1}{\beta h^3}(x_n - x_{n-1}) - \frac{1}{\beta h^2}\dot{x}_{n-1} - \frac{1}{2\beta h}\ddot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{6\beta} - 1\right)\ddot{x}_{n-1}, \tag{19}$$

Thay các phương trình (11), (12), (13) vào phương trình (10):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta h^3}(x_n - x_{n-1}) - \frac{1}{\beta h^2}\dot{x}_{n-1} - \frac{1}{2\beta h}\ddot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{6\beta} - 1\right)\ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m}\right)\left[\frac{\alpha}{\beta h^2}(x_n - x_{n-1}) - \frac{\alpha}{\beta h}\dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right)\ddot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{6\beta}\right)h\ddot{x}_{n-1}\right] \\
&+ \frac{k(c_1+c_2)}{mc_2}\left[\frac{\gamma}{\beta h}(x_n - x_{n-1}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)h\ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{6\beta}\right)h^2\ddot{x}_{n-1}\right] \\
&= \frac{c_1}{m}\ddot{u}(t_n) + \frac{k(c_1+c_2)}{mc_2}\dot{u}(t_n)
\end{aligned} \tag{20}$$

Ta tính toán về trái của phương trình (20):

$$\begin{aligned}
VT_{(20)} &= \left[\frac{1}{\beta h^3} + \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m}\right)\frac{\alpha}{\beta h^2} + \frac{k(c_1+c_2)}{mc_2}\frac{\gamma}{\beta h}\right]x_n - \left[\frac{1}{\beta h^3}x_{n-1} + \frac{1}{\beta h^2}\dot{x}_{n-1} + \frac{1}{2\beta h}\ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{1}{6\beta} - 1\right)\ddot{x}_{n-1}\right] \\
&- \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m}\right)\left[\frac{\alpha}{\beta h^2}x_{n-1} + \frac{\alpha}{\beta h}\dot{x}_{n-1} + \left(\frac{\alpha}{2\beta} - 1\right)\ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{\alpha}{6\beta} - 1\right)h\ddot{x}_{n-1}\right] \\
&- \frac{k(c_1+c_2)}{mc_2}\left[\frac{\gamma}{\beta h}x_{n-1} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{x}_{n-1} + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)h\ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{\gamma}{6\beta} - \frac{1}{2}\right)h^2\ddot{x}_{n-1}\right],
\end{aligned} \tag{21}$$

Giả sử kích động mặt đường u được biểu diễn bởi hàm điều hòa

$$u = U \sin(\omega t + \varphi) \tag{22}$$

Với U, ω, φ là các hằng số.

Ta có đạo hàm cấp 1, cấp 2 của u

$$\dot{u} = U\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad (23)$$

$$\ddot{u} = -U\omega^2 \sin(\omega t + \varphi), \quad (24)$$

Thay (23), (24) và (21) vào phương trình (20) ta được:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\beta h^3} + \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m} \right) \frac{\alpha}{\beta h^2} + \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2} \frac{\gamma}{\beta h} \right] x_n \\ &= -\frac{c_1}{m} U\omega^2 \sin(\omega t_n + \varphi) + \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2} U\omega \cos(\omega t_n + \varphi) + \left[\frac{1}{\beta h^3} x_{n-1} + \frac{1}{\beta h^2} \dot{x}_{n-1} + \frac{1}{2\beta h} \ddot{x}_{n-1} \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{6\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} \right] + \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m} \right) \left[\frac{\alpha}{\beta h^2} x_{n-1} + \frac{\alpha}{\beta h} \dot{x}_{n-1} + \left(\frac{\alpha}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{\alpha}{6\beta} - 1 \right) h \ddot{x}_{n-1} \right] \\ &+ \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2} \left[\frac{\gamma}{\beta h} x_{n-1} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{x}_{n-1} + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) h \ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{\gamma}{6\beta} - \frac{1}{2} \right) h^2 \ddot{x}_{n-1} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Như vậy ta đã tìm được nghiệm số x_n của phương trình vi phân dao động (16) theo các giá trị của $x_{n-1}, \dot{x}_{n-1}, \ddot{x}_{n-1}$ với $\dot{x}_{n-1}, \ddot{x}_{n-1}$ và $\ddot{x}_{n-1}$ được tính như sau:

$$\begin{cases} \ddot{x}_n = \frac{1}{\beta h^3} (x_n - x_{n-1}) - \frac{1}{\beta h^2} \dot{x}_{n-1} - \frac{1}{2\beta h} \ddot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{6\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} \\ \ddot{x}_n = \ddot{x}_{n-1} + (1 - \alpha) h \ddot{x}_{n-1} + \alpha h \ddot{x}_n \\ \dot{x}_n = \dot{x}_{n-1} + h \ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) h^2 \ddot{x}_{n-1} + \gamma h^2 \ddot{x}_n \end{cases} \quad (26)$$

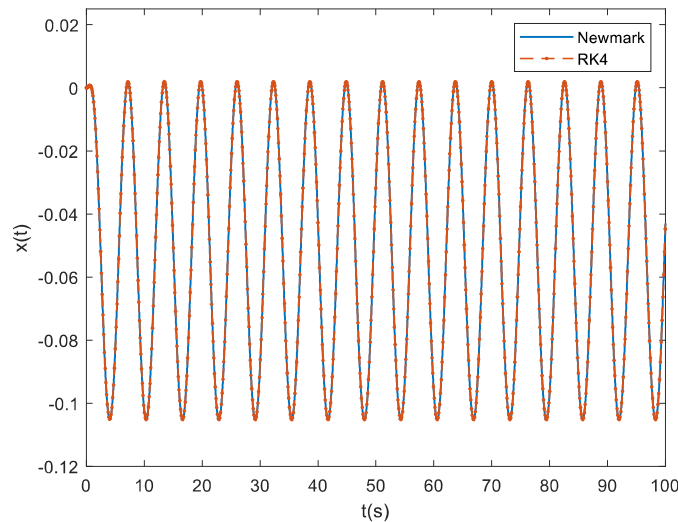
Giả thiết rằng điều kiện ban đầu của các công thức trên $x(0), \dot{x}(0)$ và $\ddot{x}(0)$ đã cho.

4. Ví dụ số

Lấy các số liệu $m = 5000 \text{ kg}, k = 10000 \text{ N/m}, c_1 = 8000 \text{ Ns/m}, c_2 = 10000 \text{ Ns/m}$ với $h = 0.01, \alpha = 1/2, \gamma = 1/4, \beta = 1/12$. Trong trường hợp $u = 0.05 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$, phương trình vi phân dao động có dạng:

$$\ddot{x} + 2.6\dot{x} + 3.6x = -0.08 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.18 \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (27)$$

Với các điều kiện đầu $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \ddot{x}(0) = 0.01 \Rightarrow \ddot{x}(0) = -0.0053$, đồ thị biên độ dao động được biểu diễn trong Hình 3.



Hình 3. Đồ thị biên độ dao động của ô tô.

5. Kết luận

Trong báo cáo này, tác giả đã nghiên cứu xây dựng chương trình tính toán số dựa trên phương pháp Newmark giải hệ phương trình vi phân cấp hai, tìm nghiệm của phương trình vi phân có chứa đạo hàm cấp ba. Sau đó sử dụng chương trình thiết lập được để tính toán dao động của ô tô. Kết quả thu được là đồ thị mô tả biên độ dao động của ô tô trên mặt đường mấp mô có dạng một hàm điều hòa.

Báo cáo cũng so sánh kết quả tính toán bằng phương pháp Newmark và phương pháp Runge-Kutta. Trong ví dụ, có sự thống nhất giữa các kết quả bằng phương pháp Newmark và phương pháp Runge-Kutta. Thuật toán tích phân số Newmark một bước được trình bày cho các hệ cấp ba là hiệu quả và phù hợp. Theo thuật toán này, một chương trình máy tính được phát triển bằng phần mềm Matlab.

Tài liệu tham khảo

- Bùi Thị Thuý, 2017. *Dao động phi tuyến yếu của hệ cấp ba có đạo hàm cấp phân số*. Luận án tiến sĩ cơ học, Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn Lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.
- Đinh Văn Phong, 2006. *Phương pháp số trong cơ học*. NXB Khoa học và kỹ thuật Hà Nội.
- Hồ Quốc Khánh, 2019. *Nghiên cứu ứng dụng logic mờ trong điều khiển hệ thống treo cho ô tô*. Luận văn thạc sĩ, Trường Đại học Sư phạm kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh.
- M. J. Géradin, D. Rixen, 1994. *Mechanical Vibrations*. Wiley, Chichester.
- Nguyễn Văn Khang, 2023. *Dao động kỹ thuật*. NXB Bách Khoa Hà Nội.
- N.M. Newmark, 1959. A Method of Computation for structural Dynamics. *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol. 85, pp 67 – 94.

ABSTRACT

Calculating the vibration of a car containing the third derivative using the Newmark method

Bui Thi Thuy

Hanoi University of Mining and Geology

The car's vibrations generated during movement affect the road, the car itself and the people sitting in the car. In this paper, the vibrational differential equation containing the third order derivative of a car is researched by the Newmark method. The vibrational differential equation is established and the numerical solution is determined. Then, investigate the car's vibrations under the influence of harmonic excitation force.

Keywords: third order derivative; car vibration; Newmark method.