

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT**

**BÁO CÁO HỌC THUẬT**

**BÀI TOÁN ĐẾM TRONG KÌ THI  
OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN**

**Th.S. Hà Hữu Cao Trình**

**Hà Nội, 6/2026**

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT**

**BÁO CÁO HỌC THUẬT**

**BÀI TOÁN ĐẾM TRONG KÌ THI  
OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN**

**Xác nhận của bộ môn**

**Hà Nội, 6/2026**

## MỤC LỤC

|                                                              |           |
|--------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Mở đầu .....</b>                                       | <b>4</b>  |
| <b>2. Cơ sở lý thuyết.....</b>                               | <b>5</b>  |
| 2.1. Nguyên lý đếm và các mô hình cơ bản.....                | 5         |
| 2.2. Nguyên lý bù, nguyên lý bao hàm loại trừ.....           | 6         |
| 2.3. Đếm bằng song ánh.....                                  | 6         |
| 2.4. Truy hồi và hàm sinh .....                              | 7         |
| <b>3. Một số bài toán đếm chọn lọc.....</b>                  | <b>8</b>  |
| 3.1. Các bài toán từ Kỳ yếu Olympic Toán học toàn quốc ..... | 8         |
| 3.2. Các bài toán từ Olympic toán Đại học Mở Địa chất.....   | 15        |
| <b>4. Kết luận .....</b>                                     | <b>20</b> |
| <b>5. Tài liệu tham khảo .....</b>                           | <b>21</b> |

## 1. MỞ ĐẦU

Bài toán đếm giữ một vị trí đặc biệt trong toán học rời rạc vì nó vừa gần gũi với trực giác, vừa đòi hỏi sự chính xác cao trong việc mô tả đối tượng. Một lời giải đếm đúng không chỉ đưa ra một con số; nó phải chỉ rõ mỗi cấu trúc của từng cấu hình. Chính yêu cầu đó làm cho bài toán đếm trở thành môi trường tốt để rèn luyện tư duy lập luận, khả năng tổ chức chứng minh và năng lực chuyển đổi giữa nhiều mô hình toán học.

Trong các kì thi Olympic Toán học dành cho sinh viên, bài toán đếm xuất hiện dưới nhiều hình thức. Có bài toán được trình bày trực tiếp bằng ngôn ngữ tổ hợp như chọn vị trí, phân phối đồ vật, tô màu hay đếm đường đi. Có bài lại ẩn trong đại số tuyến tính, chẳng hạn đếm các ma trận thỏa mãn một điều kiện cấu trúc; hoặc ẩn trong bài toán đa thức, đồ thị và truy hồi. Một số đề yêu cầu tìm số lượng chính xác, trong khi một số đề dùng tư tưởng đếm để chứng minh sự tồn tại bằng nguyên lý Dirichlet hoặc bằng cách đếm cùng một tập hợp theo hai cách.

Báo cáo này được xây dựng từ các kỷ yếu Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên - Học sinh toàn quốc; đồng thời sử dụng các đề Olympic Đại số của Trường Đại học Mở - Địa, lời giải được biên soạn lại theo hướng chi tiết, thống nhất ký hiệu và làm rõ ý tưởng trung tâm.

## 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

### 2.1. Nguyên lý đếm và các mô hình cơ bản

Một bài toán đếm yêu cầu xác định số phần tử của một tập hữu hạn hoặc số cấu hình thỏa mãn một hệ điều kiện. Trước khi áp dụng công thức, cần xác định rõ hai cấu hình được xem là khác nhau khi nào. Đây là bước quyết định, bởi cùng một tình huống có thể dẫn đến các đáp số khác nhau nếu các đối tượng được coi là phân biệt hoặc không phân biệt.

**Nguyên lý cộng.** Nếu tập  $S$  được phân hoạch thành các tập con đôi một rời nhau  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , thì số phần tử của  $S$  bằng tổng số phần tử của các phần.

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_k|.$$

Khi sử dụng nguyên lý cộng, hai yêu cầu phải được kiểm tra: mọi cấu hình phải rơi vào ít nhất một trường hợp và không cấu hình nào rơi vào hai trường hợp.

**Nguyên lý nhân.** Nếu một cấu hình được xây dựng qua  $k$  bước và ở bước thứ  $i$  luôn có  $n_i$  lựa chọn sau khi các bước trước đã được ấn định, thì số cấu hình bằng tích các số lựa chọn.

$$N = n_1 n_2 \dots n_k.$$

Nguyên lý nhân đặc biệt hữu ích khi các đối tượng có nhãn.

**Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp.** Số hoán vị của  $n$  phần tử phân biệt là  $n!$ . Số cách chọn có thứ tự  $k$  phần tử từ  $n$  phần tử là  $A(n, k)$ , còn số cách chọn không thứ tự là  $C(n, k)$ .

$$A(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!},$$

$$C(n, k) = \frac{n!}{[k! (n - k)!]}.$$

Khi một tập được chia thành các nhóm có kích thước  $n_1, \dots, n_r$ , số cách gán  $n$  đối tượng phân biệt vào các nhóm đã đặt tên là hệ số đa thức.

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}, \quad n_1 + \cdots + n_r = n.$$

**Phương pháp vách ngăn.** Số nghiệm nguyên không âm của  $x_1 + \cdots + x_r = n$  bằng  $C(n + r - 1, r - 1)$ . Số nghiệm nguyên dương bằng  $C(n - 1, r - 1)$ .

Cách chứng minh quen thuộc là biểu diễn  $n$  vật giống nhau bởi  $n$  dấu chấm và dùng  $r - 1$  vách ngăn. Phương pháp này cũng giải quyết việc đếm đơn thức: đơn thức  $x^a y^b z^c$  bậc  $d$  tương ứng với nghiệm không âm  $a + b + c = d$ .

**Chọn vị trí không kề nhau.** Số cách chọn  $k$  vị trí trong một hàng  $n$  vị trí sao cho không có hai vị trí được chọn liên tiếp là  $C(n - k + 1, k)$ .

*Chứng minh.* Nếu  $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$  và  $i_{j+1} \geq i_j + 2$ , đặt  $j_t = i_t - (t - 1)$ . Khi đó  $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n - k + 1$ . Phép đổi biến là một song ánh với các tập con  $k$  phần tử của tập có  $n - k + 1$  phần tử. Từ đó ta có kết quả.

## 2.2. Nguyên lý bù, nguyên lý Bao hàm - loại trừ

**Nguyên lý bù.** Nếu việc đếm các cấu hình vi phạm dễ hơn đếm trực tiếp, ta lấy tổng số cấu hình trừ số cấu hình xấu.

$$|A| = |S| - |S \setminus A|.$$

**Nguyên lý bao hàm - loại trừ.** Với các tập  $A_1, \dots, A_r$ , số phần tử của hợp được tính bằng tổng xen kẽ các giao.

$$|\cup A_i| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots.$$

Một ứng dụng điển hình là số hoán vị không có điểm cố định. Nếu  $D_n$  là số hoán vị của  $n$  phần tử mà không phần tử nào đứng đúng vị trí, ta chọn các tập  $A_i$  gồm những hoán vị cố định  $i$ . Từ bao hàm - loại trừ thu được công thức dưới đây.

$$D_n = n! \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k}{k!}.$$

## 2.3. Đếm bằng song ánh

Thay vì đếm trực tiếp tập  $A$ , ta thiết lập một ánh xạ một-một và lên giữa  $A$  với một tập  $B$  đã biết số phần tử.

Song ánh có thể rất đơn giản, như biến các vị trí không kề nhau thành một tập con thông thường; cũng có thể mang tính cấu trúc, như chứng minh các ma trận 0-1 có nghịch đảo 0-1 chính là các ma trận hoán vị. Một lời giải song ánh tốt thường giải thích đồng thời vì sao công thức đúng và vì sao không có đếm trùng.

## 2.4. Truy hồi và hàm sinh

**Truy hồi.** Khi cấu hình có kích thước  $n$  được tạo bằng cách ghép một mảnh đầu tiên rồi để lại bài toán cùng loại có kích thước nhỏ hơn, ta thu được hệ thức truy hồi.

$$R_n = a_1 R_{n-1} + \cdots + a_k R_{n-k}.$$

Để truy hồi có giá trị, cần nêu đầy đủ điều kiện đầu và chứng minh rằng các trường hợp ở bước tách đầu tiên là rời nhau và phủ hết. Với truy hồi tuyến tính hệ số hằng, nghiệm tường minh có thể tìm qua phương trình đặc trưng. Tuy nhiên, trong nhiều bài Olympic, bản thân truy hồi cùng điều kiện đầu đã là một mô tả hoàn chỉnh.

**Hàm sinh.** Với dãy  $a_0, a_1, \dots$ , hàm sinh thường là  $A(x) = \sum a_n x^n$ . Phép nhân các hàm sinh mã hóa việc cộng các kích thước độc lập.

$$A(x)B(x) = \sum_n (\sum_k a_k b_{n-k}) x^n.$$

### 3. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẾM CHỌN LỌC

#### 3.2. Các bài toán từ kỷ yếu Olympic toán sinh viên Toàn quốc

**Bài tập 1.** Một điểm đỗ xe có 30 chỗ nối liền thành một hàng. Người quản lý xếp 22 xe vào các chỗ sao cho 8 chỗ còn trống không có hai chỗ nào liền nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp?

**Lời giải.** Ta chỉ cần chọn tập 8 chỗ trống; sau khi các chỗ trống được xác định, 22 xe được hiểu là chiếm các vị trí còn lại. Gọi vị trí các chỗ trống là  $i_1 < i_2 < \dots < i_8$ . Điều kiện không kề nhau tương đương  $i_{j+1} \geq i_j + 2$ .

Lược bỏ khoảng cách bắt buộc bằng cách đặt  $j_t = i_t - (t - 1)$ . Khi đó  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_8 \leq 30 - 7 = 23$ . Ngược lại, từ một tập 8 số  $j_1 < \dots < j_8$  trong  $\{1, \dots, 23\}$ , đặt  $i_t = j_t + (t - 1)$  thì thu được 8 vị trí không kề nhau trong 30 chỗ. Hai phép biến đổi là nghịch đảo của nhau. Đáp số là  $C(23, 8) = 490314$ .

**Nhận xét.** Công thức tổng quát là  $C(n - k + 1, k)$  cho  $k$  vị trí không kề nhau trên một hàng  $n$  vị trí. Nếu các xe được xem là phân biệt và còn phải phân chúng vào 22 chỗ đã chọn, kết quả phải nhân thêm 22!.

**Bài tập 2.** Từ ô a1, quân vua chỉ được đi sang phải, đi lên hoặc đi chéo lên-phải. Có bao nhiêu đường đi đến ô h8?

**Lời giải.** Để đi từ a1 đến h8, tổng độ tăng theo phương ngang và phương dọc đều bằng 7. Giả sử đường đi có đúng  $k$  bước chéo. Mỗi bước chéo đồng thời tăng một đơn vị theo cả hai phương, nên còn  $7 - k$  bước sang phải và  $7 - k$  bước đi lên.

Với  $k$  cố định, tổng số bước là  $14 - k$ . Ta chọn vị trí cho  $k$  bước chéo, sau đó chọn vị trí cho  $7 - k$  bước ngang; các vị trí còn lại là bước dọc. Số đường đi ứng với  $k$  là hệ số đa thức

$$\frac{(14 - k)!}{[k! (7 - k)! (7 - k)!]}.$$

Cộng theo  $k = 0, 1, \dots, 7$ , ta được số Delannoy trung tâm  $D(7, 7)$ . Một dạng tương đương, nhận được bằng cách chọn  $k$  tọa độ ngang và  $k$  tọa độ dọc để ghép thành các bước chéo, là tổng  $C(7, k)^2 2^k$ . Kết quả là

$$\sum_{k=0}^7 C(7, k)^2 2^k = 48639.$$

**Nhận xét.** Bài toán minh họa việc phân loại theo số bước thuộc một loại đặc biệt. Khi chỉ có bước ngang và dọc, kết quả là  $C(14, 7)$ ; việc cho phép bước chéo làm xuất hiện tổng Delannoy.

**Bài tập 3.** Một khu vườn có 5 cây xà cừ, 20 cây bạch đàn và 20 cây xoan; giá mỗi cây lần lượt là 10, 5 và 3 triệu đồng.

(a) Chặt 10 cây trong hai loại bạch đàn và xoan, cả hai loại đều bị chặt.

(b) Chặt 5 cây, thu ít nhất 35 triệu đồng.

(c) Chặt 20 trong 40 cây bạch đàn và xoan sao cho số bạch đàn còn lại nhiều hơn số xoan còn lại.

Đếm số cách trong từng trường hợp.

**Lời giải.** Các cây được xem là phân biệt.

(a) Nếu chặt  $k$  cây bạch đàn thì chặt  $10 - k$  cây xoan, với  $1 \leq k \leq 9$ . Kết quả là

$$\sum_{k=1}^9 C(20, k)C(20, 10 - k) = C(40, 10) - 2C(20, 10) = 847291016.$$

(b) Gọi  $x, y, z$  lần lượt là số cây xà cừ, bạch đàn, xoan bị chặt. Ta có  $x + y + z = 5$  và điều kiện doanh thu  $10x + 5y + 3z \geq 35$ . Thay  $z = 5 - x - y$ , điều kiện trở thành  $7x + 2y \geq 20$ . Liệt kê các bộ khả dĩ cho ta

$$(x, y, z) \in \{(2, 3, 0), (3, 0, 2), (3, 1, 1), (3, 2, 0), (4, 0, 1), (4, 1, 0), (5, 0, 0)\}.$$

Với mỗi bộ, số cách chọn là  $C(5, x)C(20, y)C(20, z)$ . Cộng bảy trường hợp ta có

$$11400 + 1900 + 4000 + 1900 + 100 + 100 + 1 = 19401.$$

(c) Gọi  $y$  là số bạch đàn bị chặt và  $z$  là số xoan bị chặt. Ta có  $y + z = 20$ . Sau khi chặt, số bạch đàn còn  $20 - y$  và số xoan còn  $20 - z$ . Điều kiện  $20 - y > 20 - z$  tương đương  $y < z$ , tức  $y \leq 9$ . Kết quả là

$$\sum_{y=0}^9 C(20, y)C(20, 20 - y) = \frac{[C(40, 20) - C(20, 10)^2]}{2} = 51855874642.$$

**Nhận xét.** Phần (c) dùng đối xứng: các trường hợp  $y < z$  và  $y > z$  có số lượng bằng nhau; trường hợp  $y = z = 10$  phải tách riêng. Đây là kỹ thuật thường giúp rút ngắn một tổng tổ hợp dài.

**Bài tập 4.** Trong vành  $F[x, y, z]$ , có bao nhiêu đơn thức bậc đúng  $d$ ? Có bao nhiêu đơn thức bậc không vượt quá  $d$ ?

**Lời giải.** Một đơn thức bậc  $d$  có dạng  $x^a y^b z^c$ , trong đó  $a, b, c$  là các số nguyên không âm và  $a + b + c = d$ . Vì mỗi bộ số mũ xác định duy nhất một đơn thức, bài toán trở thành đếm nghiệm nguyên không âm của một phương trình. Kết quả là  $C(d + 2, 2)$ .

Đối với bậc không vượt quá  $d$ , ta cần đếm các bộ  $a + b + c \leq d$ . Đưa vào biến phụ  $t = d - a - b - c \geq 0$ , ta có phương trình  $a + b + c + t = d$  với bốn ẩn không âm. Do đó kết quả là  $C(d + 3, 3)$ .

Các đơn thức tương ứng độc lập tuyến tính và sinh toàn bộ không gian đa thức cần xét. Vì thế số lượng trên cũng chính là số chiều của không gian đa thức thuần nhất bậc  $d$  và không gian đa thức bậc không vượt quá  $d$ .

**Bài tập 5.** Có 6 sinh viên phân biệt và 4 toa tàu phân biệt. Mỗi sinh viên chọn một toa, nhưng không toa nào có quá 2 sinh viên. Hỏi có bao nhiêu phương án?

**Lời giải.** Tổng sức chứa tối đa là 8, còn có 6 sinh viên. Các dạng phân bố không vượt quá 2 chỉ có hai loại: (2,2,2,0) và (2,2,1,1), kể cả hoán vị các toa.

Loại thứ nhất: chọn toa trống theo 4 cách. Với ba toa còn lại, số cách chia 6 sinh viên thành ba nhóm có nhãn, mỗi nhóm 2 người, là  $6!/(2!2!2!)$ . Kết quả là

$$4 \cdot \frac{6!}{2!^3} = 360.$$

Loại thứ hai: chọn hai toa nhận 2 sinh viên theo  $C(4,2)$  cách. Khi bốn toa đã có kích thước 2,2,1,1, số cách phân sinh viên là  $6!/(2!2!1!1!)$ . Kết quả là

$$C(4,2) \cdot \frac{6!}{2!^2} = 1080.$$

Từ đó đáp số là 1440.

**Bài tập 6.** Cho  $A$  là ma trận  $2 \times 2$  có các phần tử thuộc  $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ . Có bao nhiêu ma trận  $A$  thỏa mãn  $\det(A) = 0$ ?

**Lời giải.** Ta phân loại theo số lượng số 0 và dạng tỉ lệ của hai hàng.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Với mỗi số nguyên  $t$ , đặt  $r(t)$  là số cặp có thứ tự  $(u, v) \in X^2$  sao cho  $uv = t$ . Chọn  $(a, d)$  và  $(b, c)$  có cùng tích  $t$  cho đúng  $r(t)^2$  ma trận.

Ta có  $r(0) = 11$ . Với các tích dương:  $r(1) = 1$ ;  $r(2) = r(3) = r(5) = r(6) = r(8) = r(10) = r(12) = r(15) = r(20) = 2$ ;  $r(4) = 3$ ; và  $r(9) = r(16) = r(25) = 1$ . Các tích còn lại có kết quả bằng 0. Vậy đáp số là

$$11^2 + 9 \cdot 2^2 + 3^2 + 4 \cdot 1^2 = 170.$$

**Bài tập 7.** Ma trận vuông cấp  $n$  có phần tử thuộc  $\{-1,0,1\}$  được gọi là ma trận Olympic nếu tổng các phần tử trên mọi đường hoán vị đều bằng nhau. Ký hiệu  $f(n)$  là số ma trận Olympic cấp  $n$ . Tìm  $f(n)$ .

**Lời giải.** Điều kiện của đề tương đương với: hiệu của hai hàng bất kỳ là một vector hằng. Thật vậy, so sánh hai đường hoán vị chỉ khác nhau ở việc đổi hai cột  $k, l$  giữa hai hàng  $i, j$ , ta có  $a_{ik} + a_{jl} = a_{il} + a_{jk}$ , nên  $a_{ik} - a_{jk}$  không phụ thuộc  $k$ .

Ta phân loại theo hàng đầu tiên. Nếu hàng đầu là hằng, mỗi hàng khác cũng phải hằng và có 3 lựa chọn; được  $3^n$  ma trận. Nếu hàng đầu chỉ dùng 0 và 1, đồng thời cả hai giá trị đều xuất hiện, có  $2^n - 2$  cách chọn hàng đầu. Mỗi hàng sau bằng hàng đầu hoặc kém hàng đầu một đơn vị ở mọi tọa độ; do đó có 2 lựa chọn cho mỗi hàng, tổng  $2^{n-1}(2^n - 2)$ . Trường hợp chỉ dùng 0 và -1 cho số lượng tương tự.

Nếu hàng đầu chứa đồng thời 1 và -1, các hàng khác buộc phải bằng hàng đầu. Số hàng đầu kiểu này là tổng  $3^n$  trừ các hàng đã nằm trong ba loại trước: ba hàng hằng và hai họ nhị phân không hằng. Kết quả là  $3^n - 2 \cdot 2^n + 1$ .

$$f(n) = 3^n + 2 \cdot 2^{n-1}(2^n - 2) + (3^n - 2 \cdot 2^n + 1).$$

$$f(n) = 4^n + 2 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n + 1.$$

Kiểm tra  $n = 2$  cho  $f(2) = 16 + 18 - 16 + 1 = 19$ .

**Nhận xét.** Đây là ví dụ tiêu biểu về đếm cấu trúc đại số. Bước khó không phải tính tổng cuối cùng mà là chuyển điều kiện trên  $n!$  đường hoán vị thành quan hệ đơn giản giữa các hàng.

**Bài tập 8.** Ký hiệu  $P_n$  là tập các ma trận khả nghịch cấp  $n$  sao cho mọi phần tử của  $A$  và  $A^{-1}$  đều bằng 0 hoặc 1. Tính  $|P_n|$ .

**Lời giải.** Đặt  $B = A^{-1}$ . Ta có  $AB = I$ . Vì các phần tử của  $A$  và  $B$  không âm, với  $i \neq j$ , đẳng thức  $\sum_k a_{ik}b_{kj} = 0$  kéo theo  $a_{ik}b_{kj} = 0$  với mọi  $k$ . Với  $i = j$ , tổng  $\sum_k a_{ik}b_{ki} = 1$ , nên có đúng một chỉ số  $k$  mà  $a_{ik} = b_{ki} = 1$ .

Chỉ số  $k$  nói trên là duy nhất cho mỗi  $i$ . Nếu hai hàng  $i$  khác nhau dùng cùng một cột  $k$  làm vị trí 1 đặc biệt, từ  $AB = I$  sẽ phát sinh hai phần tử 1 trong cùng một cột của tích, mâu thuẫn. Do đó mỗi hàng của  $A$  có đúng một phần tử 1 và các vị trí này nằm ở các cột khác nhau. Vì  $A$  khả nghịch, mỗi cột cũng có đúng một phần tử 1.

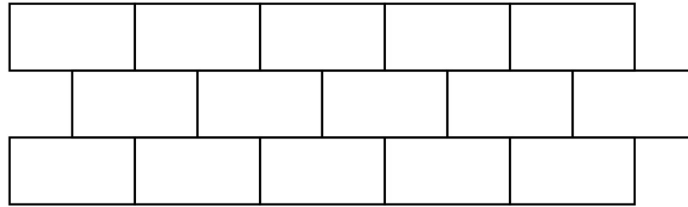
Vậy  $A$  là ma trận hoán vị. Ngược lại, mọi ma trận hoán vị có nghịch đảo là ma trận chuyển vị, cũng là ma trận 0-1. Do đó  $P_n$  song ánh với nhóm hoán vị  $S_n$ .

$$|P_n| = n!.$$

**Nhận xét.** Lời giải là một song ánh cấu trúc. Điều kiện cả  $A$  và  $A^{-1}$  triệt tiêu khả năng các tổng ngoài đường chéo có sự bù trừ.

**Bài tập 9.** Trong bức tường gạch xếp so le, đếm số cách trong mỗi trường hợp sau:

- (a) chọn một viên ở mỗi trong ba hàng, không có hai viên kề nhau;
- (b) với bốn hàng, chọn một viên ở mỗi hàng cùng điều kiện.



**Lời giải.**

(a) Hàng giữa có 5 viên. Nếu chọn một trong bốn viên đầu của hàng giữa, ở mỗi hàng trên và dưới có 3 viên không kề với nó, tạo  $3 \cdot 3 = 9$  cách. Với viên cuối theo cách ký hiệu của nguồn, có 4 lựa chọn ở mỗi hàng ngoài, tạo 16 cách. Vì vậy kết quả là

$$4 \cdot 9 + 16 = 52.$$

(b) Xét trước cặp viên được chọn ở hai hàng giữa. Có 16 cặp không kề nhau như danh sách trong hướng dẫn giải. Với mỗi cặp  $(P, Q)$ , số lựa chọn ở hàng trên chỉ phụ thuộc  $P$  và số lựa chọn ở hàng dưới chỉ phụ thuộc  $Q$ . Các số này bằng 3, ngoại trừ hai vị trí biên cho 4 lựa chọn. Cộng các tích tương ứng cho 16 cặp, ta được kết quả là

$$9 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 169.$$

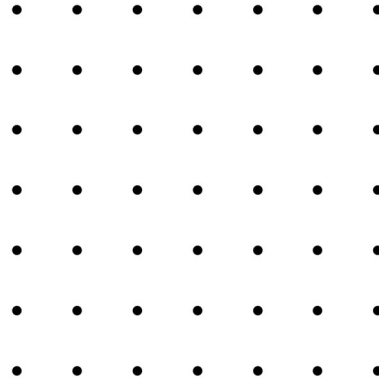
**Bài tập 10.** Trên 41 vị trí, cờ xanh ở các vị trí 1, 5, 9, ..., 41 và 30 vị trí còn lại là cờ đỏ. Chọn một cờ xanh và một cờ đỏ để đổi chỗ sao cho sau đổi vẫn không có hai cờ xanh kề nhau. Đếm số cách chọn.

**Lời giải.** Cố định cờ xanh được chuyển đi. Với cờ xanh ở vị trí 1, cờ đỏ mới chuyển về vị trí 1 không gây xung đột; vị trí nhận cờ xanh phải không kề cờ xanh nào còn lại. Trong đoạn đầu có hai vị trí hợp lệ, còn ở mỗi đoạn không chứa vị trí 1 như một đầu mút chỉ có vị trí đỏ ở giữa là hợp lệ. Tổng cộng cờ xanh ở vị trí 1 có 11 lựa chọn. Vị trí 41 đối xứng, cũng có 11 lựa chọn.

Mỗi cờ xanh bên trong, ở các vị trí 5, 9, ..., 37, là đầu chung của hai khoảng. Trong hai khoảng kề nó có tổng 4 cờ đỏ có thể nhận cờ xanh sau khi cờ hiện tại được lấy đi; trong 8 khoảng còn lại, mỗi khoảng chỉ có cờ đỏ ở giữa là hợp lệ. Do đó mỗi cờ xanh bên trong có  $4 + 8 = 12$  lựa chọn. Kết quả là

$$2 \cdot 11 + 9 \cdot 12 = 130.$$

**Bài tập 11.** Ở 49 giao điểm của một bảng  $7 \times 7$ , mỗi điểm được ghi 0 hoặc 1. Chứng minh tồn tại một hình chữ nhật có bốn đỉnh cùng được ghi 0 hoặc cùng được ghi 1.



**Lời giải.** Với mỗi cột, xét các cặp điểm cùng mang một giá trị. Nếu cột đó có  $a$  điểm ghi 0 thì có  $C(a, 2)$  cặp 0 và  $C(7 - a, 2)$  cặp 1. Tổng số cặp cùng giá trị trong cột là

$$C(a, 2) + C(7 - a, 2) = (a - 3)(a - 4) + 9 \geq 9.$$

Bảy cột tạo ra ít nhất  $7 \cdot 9 = 63$  cặp “hai hàng - một giá trị”. Chỉ có  $C(7, 2) = 21$  cặp hàng. Theo nguyên lý Dirichlet, có một cặp hàng xuất hiện ít nhất ba lần trong 63 cặp kể trên.

Ba lần xuất hiện tương ứng với ba cột và mỗi lần mang nhãn 0 hoặc 1. Trong ba nhãn này, có hai nhãn bằng nhau. Hai hàng và hai cột tương ứng tạo thành một hình chữ nhật mà bốn đỉnh cùng mang nhãn đó.

**Bài tập 12.** Điền vào bảng  $10 \times 10$  các số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai ô chung cạnh hoặc chung đỉnh chứa hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

**Lời giải.** Chia bảng thành 25 khối  $2 \times 2$  không giao nhau. Trong mỗi khối, mọi cặp ô đều chung cạnh hoặc chung đỉnh. Vì hai số chẵn không nguyên tố cùng nhau, mỗi khối có nhiều nhất một số chẵn. Tương tự, mỗi khối có nhiều nhất một số chia hết cho 3.

Do đó trong mỗi khối có ít nhất hai số vừa lẻ vừa không chia hết cho 3. Toàn bảng có ít nhất  $25 \cdot 2 = 50$  ô mang số lẻ không chia hết cho 3.

Trong các số  $1, \dots, 10$ , chỉ có  $1, 5, 7$  là lẻ và không chia hết cho 3. Phân 50 lần xuất hiện vào ba giá trị này, Dirichlet cho một giá trị xuất hiện ít nhất

$$\left\lceil \frac{50}{3} \right\rceil = 17$$

lần, điều phải chứng minh.

### 3.2. Các bài toán từ Olympic toán Đại học Mỹ Địa chất

**Bài tập 13.** Mỗi đỉnh của một lục giác được tô một trong ba màu xanh, đỏ, vàng sao cho hai đỉnh kề nhau có màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô?

**Lời giải.** Đây là số cách tô đúng chu trình  $C_6$  bằng 3 màu. Ta có thể dùng công thức đa thức sắc của chu trình: với  $q$  màu, số cách tô  $C_n$  là  $(q - 1)^n + (-1)^n(q - 1)$ .

Thay  $q = 3, n = 6$  được  $2^6 + 2 = 66$ .

Để thấy trực tiếp, cố định màu đỉnh đầu theo 3 cách. Tô tuần tự năm đỉnh tiếp theo, mỗi đỉnh có 2 lựa chọn khác đỉnh trước; tuy nhiên phải loại hoặc điều chỉnh theo việc đỉnh cuối trùng màu đỉnh đầu. Truy hồi hai trạng thái “màu hiện tại bằng màu đầu” và “khác màu đầu” dẫn đến công thức trên. Kết quả là

$$(3 - 1)^6 + (3 - 1) = 66.$$

**Bài tập 14.** Ma trận  $4 \times 4$  có mỗi phần tử bằng 1 hoặc 2. Tổng bốn phần tử trong mọi khối tạo bởi hai hàng liên tiếp và hai cột liên tiếp đều bằng 6. Có bao nhiêu ma trận?

**Lời giải.** Mỗi khối  $2 \times 2$  phải có đúng hai số 1 và hai số 2.

Xét hàng đầu. Nếu hàng đầu không xen kẽ hoàn toàn, tức không phải 1212 hoặc 2121, thì từ mỗi cặp hai phần tử liên tiếp của hàng đầu, cặp tương ứng ở hàng dưới được xác định duy nhất để khối  $2 \times 2$  có hai số 1, hai số 2. Do đó toàn bộ ba hàng sau được xác định duy nhất. Có  $2^4 - 2 = 14$  hàng đầu loại này.

Nếu hàng đầu là 1212 hoặc 2121, hàng kế tiếp có hai lựa chọn: giữ mẫu hoặc đổi mẫu. Mỗi hàng sau tiếp tục có hai lựa chọn độc lập theo cùng quy tắc. Có 2 cách chọn hàng đầu và  $2^3$  cách chọn ba hàng còn lại. Kết quả là

$$(2^4 - 2) + 2 \cdot 2^3 = 14 + 16 = 30.$$

**Bài tập 15.** Điền số nguyên không âm vào bảng  $4 \times 4$  sao cho có đúng một số 0; hai ô chung cạnh có hiệu tuyệt đối không quá 1; mỗi số dương kề ít nhất một số nhỏ hơn nó. Có bao nhiêu cách điền?

**Lời giải.** Gọi ô chứa 0 là ô gốc  $O$ . Với một ô  $X$ , lấy đường đi giảm dần: do mỗi số dương kề một số nhỏ hơn, từ  $X$  ta đi qua các ô có giá trị giảm ít nhất 1 cho đến  $O$ . Vì hiệu hai ô kề không quá 1, mỗi bước giảm đúng 1. Do đó giá trị tại  $X$  ít nhất bằng khoảng cách vuông  $d(X, O)$ .

Ngược lại, đi theo một đường ngắn nhất từ  $O$  đến  $X$ . Bắt đầu từ 0 và mỗi bước tăng không quá 1, nên giá trị tại  $X$  không vượt quá số bước, tức không vượt  $d(X, O)$ . Hai đánh giá cho

$$\text{giá trị tại } X = d(X, O).$$

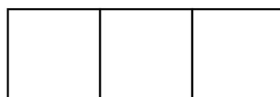
Vì vậy, sau khi chọn ô gốc, toàn bộ bảng được xác định duy nhất. Có 16 cách chọn ô gốc và mọi lựa chọn đều tạo một bảng thỏa mãn. Kết quả là 16.

**Bài tập 16.** Trong tập  $\{1, 2, \dots, 16\}$ , có bao nhiêu cấp số cộng tăng dần gồm đúng bốn phần tử?

**Lời giải.** Một bộ có dạng  $(a, a + d, a + 2d, a + 3d)$ , với  $d \geq 1$  và  $a + 3d \leq 16$ . Vì thế  $d \leq 5$ . Với  $d$  cố định,  $a$  có thể nhận các giá trị  $1, \dots, 16 - 3d$ , tức có  $16 - 3d$  lựa chọn. Kết quả là

$$13 + 10 + 7 + 4 + 1 = 35.$$

**Bài tập 17.** Hình sau gồm ba hình vuông đơn vị ghép thành một hàng. Mỗi cạnh đơn vị được tô xanh, đỏ hoặc vàng. Trong bốn cạnh của mỗi ô vuông phải có đúng hai màu, mỗi màu xuất hiện đúng hai cạnh. Hỏi có bao nhiêu cách tô hình?



**Lời giải.** Xét bốn cạnh thẳng đứng tạo thành biên trái, hai cạnh chung ở giữa và biên phải. Chọn màu cho bốn cạnh này trước; có  $3^4$  cách. Với mỗi ô vuông, hai cạnh đứng trái và phải đã biết.

Nếu hai cạnh đứng cùng màu, hai cạnh ngang phải cùng mang một màu khác; có 2 lựa chọn. Nếu hai cạnh đứng khác màu, hai cạnh ngang phải nhận đúng hai màu đó, mỗi màu một lần; có 2 cách sắp thứ tự trên - dưới. Như vậy, bất kể hai màu biên đứng như thế nào, mỗi ô luôn có đúng 2 cách tô hai cạnh ngang.

Ba ô có các cặp cạnh ngang khác nhau, nên sau khi màu các cạnh đứng được cố định, các lựa chọn của ba ô độc lập. Kết quả là

$$3^4 \cdot 2^3 = 648.$$

**Bài tập 18.** Ma trận  $5 \times 5$  được điền các số  $1, 2, \dots, 25$  theo thứ tự từng hàng.

(a) Chọn mỗi hàng một phần tử, năm phần tử khác cột nhau. Tổng  $S$  có thể nhận bao nhiêu giá trị?

(b) Có bao nhiêu cách chọn bốn phần tử khác hàng, khác cột và cùng tính chẵn lẻ?

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
| 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

**Lời giải.**

(a) Nếu ở hàng  $i$  chọn cột  $\sigma(i)$ , với  $\sigma$  là một hoán vị của  $\{1, \dots, 5\}$ , phần tử được chọn là  $5(i-1) + \sigma(i)$ . Vì tổng các giá trị  $\sigma(i)$  luôn bằng 15,

$$S = 5\sum(i-1) + \sum\sigma(i) = 50 + 15 = 65.$$

Do đó  $S$  chỉ nhận một giá trị.

(b) Các hàng lẻ tạo mẫu 3-2-3-2-3 theo số ô lẻ của từng hàng. Chọn bốn số lẻ có hai dạng.

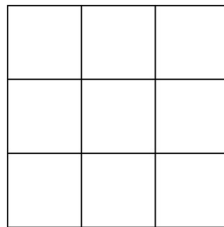
Dạng 2 hàng loại 3 và 2 hàng loại 2: có  $C(3,2) \cdot P(3,2) \cdot 2! = 36$  cách.

Dạng 3 hàng loại 3 và 1 hàng loại 2: có  $3! \cdot 2 \cdot 2 = 24$  cách. Tổng số cách chọn bốn số lẻ là 60.

Với số chẵn, mẫu đối thành 2-3-2-3-2. Để chọn bốn ô khác hàng, cột, bắt buộc dùng 2 hàng loại 2 và 2 hàng loại 3; số cách là  $C(3,2) \cdot 2! \cdot P(3,2) = 36$ . Vậy kết quả là

$$60 + 36 = 96.$$

**Bài tập 19.** Hình sau gồm chín hình vuông đơn vị ghép thành bảng  $3 \times 3$ . Tô mỗi cạnh đơn vị bằng một trong ba màu sao cho trong bốn cạnh của mỗi ô có đúng hai màu, mỗi màu xuất hiện đúng hai lần. Đếm số cách tô.



**Lời giải.** Xử lý từng hàng ba ô từ trên xuống. Trước một hàng, ba cạnh ngang phía trên đã có màu; đây là trạng thái biên. Chọn thêm màu của cạnh đứng ngoài cùng bên trái theo 3 cách.

Xét một ô từ trái sang phải. Khi màu cạnh trên và cạnh trái đã biết, luôn có đúng 2 cách chọn đồng thời cạnh dưới và cạnh phải: nếu hai cạnh đã biết cùng màu, hai cạnh mới phải cùng mang một màu khác; nếu chúng khác màu, hai cạnh mới phải mang lại đúng hai màu đó theo một trong hai thứ tự.

Vì vậy, với mỗi trạng thái biên trên cố định, một hàng ba ô có

$$3 \cdot 2^3 = 24$$

cách mở rộng, đồng thời tạo ra một trạng thái biên dưới mới. Ban đầu ba cạnh trên cùng có  $3^3 = 27$  cách chọn. Ba hàng được mở rộng liên tiếp, mỗi hàng nhân 24 cách, nên kết quả là

$$3^3 \cdot 24^3 = 373248.$$

**Bài tập 20.** *Phát triển từ Olympic Đại số Trường Đại học Mở - Địa chất.*

Với  $q \geq 2$ , đếm số cách tô các đỉnh của chu trình đơn  $C_n$  bằng  $q$  màu sao cho hai đỉnh kề nhau khác màu.

**Lời giải.** Cố định màu của đỉnh đầu. Sau khi tô một đường gồm  $n$  đỉnh, ta theo dõi hai số:  $a_n$  là số cách mà đỉnh cuối cùng có cùng màu với đỉnh đầu,  $b_n$  là số cách mà chúng khác màu. Ta có  $a_1 = 1, b_1 = 0$  và

$$a_{m+1} = b_m, \quad b_{m+1} = (q-1)a_m + (q-2)b_m.$$

Số cách tô chu trình sau khi màu đầu đã cố định là . Giải truy hồi, hoặc dùng đa thức đặc trưng, cho ta

$$b_n = \frac{[(q-1)^n + (-1)^n(q-1)]}{q}.$$

Nhân  $q$  cách chọn màu đỉnh đầu, số cách tô chu trình là

$$(q-1)^n + (-1)^n(q-1).$$

#### 4. KẾT LUẬN

Báo cáo đã hệ thống hóa các công cụ cơ bản và nâng cao thường xuất hiện trong bài toán đếm ở các kì thi Olympic: nguyên lý cộng - nhân, tổ hợp, phương pháp vách ngăn, nguyên lý bù và bao hàm - loại trừ, phương pháp song ánh, truy hồi, hàm sinh.

Phần trọng tâm tuyển chọn các bài toán từ các Kỷ yếu Olympic Toán học Sinh viên - Học sinh toàn quốc giai đoạn 2022-2025 và các đề Olympic Đại số Trường Đại học Mở - Địa chất. Các bài toán trải rộng từ chọn vị trí, đường đi, phân phối, tô màu, lát hình đến đếm ma trận.

Qua hệ thống ví dụ, có thể thấy giá trị của bài toán đếm không nằm ở việc áp dụng một công thức duy nhất. Khâu quan trọng nhất là mô hình hóa: xác định đúng cấu hình, tìm tham số phân loại và kiểm soát đếm trùng. Những bài có vẻ thuộc đại số tuyến tính hoặc lý thuyết ma trận vẫn có thể quy về một bài toán đếm sau khi điều kiện cấu trúc được rút gọn. Ngược lại, những bài tổ hợp trực tiếp thường cần một cách nhìn đại số như hàm sinh hoặc ma trận chuyển để đạt lời giải ngắn gọn.

Tài liệu có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho giảng viên tổ chức chuyên đề và tập bài luyện cho sinh viên. Việc kết hợp chứng minh lý thuyết với kiểm tra tính toán sẽ giúp nâng cao độ tin cậy và hiệu quả bồi dưỡng Olympic.

Tài liệu hy vọng góp phần hỗ trợ giảng viên trong công tác tuyển chọn, bồi dưỡng đội tuyển và giúp sinh viên hình thành thói quen mô hình hóa, kiểm tra đếm lặp và trình bày lời giải chặt chẽ.

## 5. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Hội Toán học Việt Nam, *Kỷ yếu Kỳ thi Olympic Toán học sinh viên*.

[2] Trường Đại học Mở - Địa chất, *Đáp án Olympic Toán học sinh viên*.