

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT**

BÁO CÁO HỌC THUẬT

CHU TRÌNH EULER VÀ ỨNG DỤNG

Th.S. Hà Hữu Cao Trình

Hà Nội, 6/2026

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT**

BÁO CÁO HỌC THUẬT

CHU TRÌNH EULER VÀ ỨNG DỤNG

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội, 6/2026

MỤC LỤC

1. Mở đầu	4
2. Cơ sở lý thuyết	5
2.1. Đồ thị, bậc và tính liên thông.....	5
2.2. Đường đi, đường đi và chu trình.....	8
2.3. Đồ thị có hướng, đa đồ thị và biểu diễn.....	12
3. Chu trình Euler và thuật toán	14
3.1. Định lý Euler và các hệ quả	14
3.2. Quy trình nhận biết và giải bài toán.....	16
3.3. Thuật toán Fleury và Hierholzer	18
4. Kết luận	22
5. Tài liệu tham khảo.....	23

1. MỞ ĐẦU

Lý thuyết đồ thị hình thành từ nhu cầu mô hình hóa những quan hệ rời rạc giữa các đối tượng. Một trong những bài toán mở đầu có ý nghĩa lịch sử đặc biệt là bài toán bảy cây cầu ở Königsberg: liệu có thể thực hiện một hành trình đi qua mỗi cây cầu đúng một lần hay không. Trong công trình viết năm 1735 và công bố năm 1741, Leonhard Euler đã loại bỏ các yếu tố hình học không thiết yếu của bản đồ, chỉ giữ lại các miền đất và các cây cầu nối chúng. Cách trừu tượng hóa này dẫn đến việc khảo sát bậc của các đỉnh và thường được xem là điểm khởi đầu của lý thuyết đồ thị cũng như một trong những tiền đề của tô pô học tổ hợp.

Từ bài toán lịch sử đó, khái niệm đường đi Euler và chu trình Euler được phát triển thành một nội dung cơ bản của toán học rời rạc. Điểm nổi bật của lý thuyết Euler là sự tương phản giữa phát biểu rất trực quan và tiêu chuẩn tồn tại đơn giản: đối với một đồ thị vô hướng liên thông, việc đi qua mỗi cạnh đúng một lần được quyết định hoàn toàn bởi tính chẵn lẻ của bậc các đỉnh. Tiêu chuẩn này không chỉ cho phép chứng minh sự tồn tại hoặc không tồn tại của hành trình, mà còn dẫn tới các thuật toán xây dựng có độ phức tạp tuyến tính theo kích thước đồ thị.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1. Đồ thị, bậc và tính liên thông

Định nghĩa. Một đồ thị vô hướng hữu hạn là một cặp $G = (V, E)$, trong đó V là tập hữu hạn các đỉnh và E là một họ các cạnh; mỗi cạnh liên kết hai đỉnh, có thể trùng nhau trong trường hợp có khuyên. Nếu không có khuyên và không có hai cạnh cùng nối một cặp đỉnh thì G được gọi là đồ thị đơn. Nếu cho phép các cạnh song song, ta thu được đa đồ thị. Trong các bài toán tuyến đường, đa đồ thị thường tự nhiên hơn đồ thị đơn vì hai nút giao có thể được nối bởi nhiều đường khác nhau.

Hai đỉnh u và v được gọi là kề nhau nếu có một cạnh nối chúng. Một cạnh e có hai đầu mút u, v được ký hiệu $e = uv$. Tập các cạnh liên thuộc với đỉnh v quyết định mức độ kết nối cục bộ của v . Khái niệm này được lượng hóa bởi bậc của đỉnh và là đại lượng trung tâm trong lý thuyết Euler.

Định nghĩa. Bậc của đỉnh v , ký hiệu $d(v)$, là số cạnh liên thuộc với v ; mỗi khuyên tại v được tính hai lần. Đỉnh có bậc chẵn được gọi là đỉnh chẵn, đỉnh có bậc lẻ được gọi là đỉnh lẻ. Đỉnh bậc 0 là đỉnh cô lập, còn đỉnh bậc 1 thường được gọi là đỉnh treo.

Định lý. Trong mọi đa đồ thị vô hướng hữu hạn, tổng bậc của tất cả các đỉnh bằng hai lần số cạnh. Kết quả này thường được gọi là bổ đề bắt tay.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Hệ quả. Số đỉnh bậc lẻ của một đồ thị vô hướng hữu hạn luôn là số chẵn.

$$|\{v \in V: d(v) \text{ lẻ}\}| \equiv 0 \pmod{2}$$

Một đồ thị có thể gồm nhiều bộ phận không liên hệ với nhau. Tuy nhiên, một hành trình đi qua mọi cạnh chỉ có thể tồn tại khi tất cả các cạnh có thể tiếp cận từ cùng một vị trí. Vì vậy, tính liên thông phải được đưa vào điều kiện của các định lý Euler.

Định nghĩa. Một dãy đỉnh $v_0, v_1, \dots, v_k$ được gọi là một đường nối từ v_0 đến v_k nếu mỗi cặp liên tiếp v_{i-1}, v_i là hai đầu mút của một cạnh. Đồ thị G được gọi là liên thông nếu với mọi hai đỉnh u, v của G đều tồn tại một đường nối từ u đến v . Một thành phần liên thông là một đồ thị con liên thông tối đại.

Trong ngữ cảnh Euler, các đỉnh cô lập không ảnh hưởng đến việc đi qua các cạnh. Do đó, phát biểu chính xác thường yêu cầu đồ thị con sinh bởi các đỉnh có bậc dương là liên thông. Nói cách khác, tất cả các cạnh của đồ thị phải nằm trong cùng một thành phần liên thông; các đỉnh bậc 0 có thể bỏ qua.

Định nghĩa. Một cạnh e của đồ thị liên thông G được gọi là cầu nếu xóa e làm tăng số thành phần liên thông. Cầu biểu thị một liên kết duy nhất giữa hai phần của mạng. Nếu đi qua một cầu quá sớm trong quá trình xây dựng đường đi Euler, người đi có thể bị giữ lại trong một phần của đồ thị trong khi vẫn còn cạnh chưa sử dụng ở phần khác.

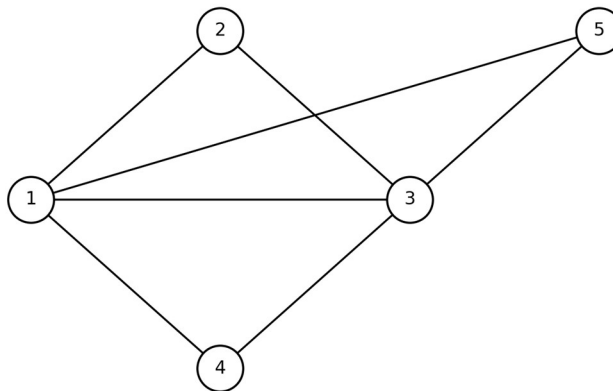
Đặc điểm trên là cơ sở của thuật toán Fleury: tại mỗi bước, tránh chọn cầu của đồ thị các cạnh chưa sử dụng, trừ khi không còn lựa chọn nào khác. Tuy nhiên, việc kiểm tra cầu lặp đi lặp lại làm thuật toán này kém hiệu quả hơn thuật toán Hierholzer. Vì vậy, Fleury có giá trị minh họa và sư phạm, còn Hierholzer phù hợp với cài đặt trên dữ liệu lớn.

Mệnh đề. Nếu mọi đỉnh của một đồ thị liên thông G đều có bậc chẵn thì G không có cầu.

Mệnh đề cho thấy đồ thị liên thông chẵn có cấu trúc đủ “khép kín” để tiếp tục hành trình mà không bị buộc phải rời khỏi một vùng qua một cạnh độc nhất. Tuy nhiên, để xây dựng chu trình Euler một cách đầy đủ, cần các khái niệm đường đi, đường đi và chu trình được trình bày ở mục sau.

Ví dụ. Xét đồ thị có tập đỉnh $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và tập cạnh $E = \{12, 23, 34, 41, 13, 35, 51\}$. Ta có $d(1) = 4$, $d(2) = 2$, $d(3) = 4$, $d(4) = 2$ và $d(5) = 2$. Tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn, đồ thị liên thông và do đó là một ứng viên tự nhiên cho chu trình Euler.

Tổng bậc của đồ thị bằng $4 + 2 + 4 + 2 + 2 = 14$, đúng bằng hai lần số cạnh. Một chu trình Euler của đồ thị là $1-2-3-5-1-4-3-1$. Dãy này sử dụng đúng bảy cạnh và quay về đỉnh xuất phát. Ví dụ cũng cho thấy chu trình Euler không yêu cầu mỗi đỉnh chỉ xuất hiện một lần; điều bị cấm lặp là cạnh, không phải đỉnh.



Nhận xét. Khái niệm Euler khác căn bản với khái niệm Hamilton. Chu trình Euler đi qua mỗi cạnh đúng một lần, còn chu trình Hamilton đi qua mỗi đỉnh đúng một lần. Bài toán Euler có tiêu chuẩn tồn tại và thuật toán tuyến tính, trong khi bài toán Hamilton nói chung khó hơn rất nhiều về mặt tính toán. Việc phân biệt hai loại bài toán giúp lựa chọn đúng mô hình: phục vụ đường phố, đường ống và dây cáp là bài toán trên cạnh; ghé thăm địa điểm hoặc khách hàng thường là bài toán trên đỉnh.

Trong thực tế, một nút giao có thể được biểu diễn bởi đỉnh, còn mỗi đoạn đường cần phục vụ được biểu diễn bởi cạnh và được gán trọng số là chiều dài, thời gian hoặc chi phí. Khi mọi nút giao có số đoạn đường liên thuộc chẵn, mạng đã có cấu trúc Euler. Nếu

tồn tại các đỉnh lẻ, cần ghép cặp các đỉnh đó bằng những đường đi bổ sung để biến mạng thành đa đồ thị chẵn; đây chính là ý tưởng toán học của bài toán người đưa thư Trung Hoa.

Mô hình đồ thị là một phép trừu tượng hóa. Khi chuyển một mạng đường phố thành đồ thị, ta bỏ qua chiều rộng của đường, hình dạng uốn cong và vị trí địa lý chính xác nếu các yếu tố đó không ảnh hưởng đến yêu cầu của bài toán. Ta chỉ giữ các nút giao, các đoạn đường cần phục vụ và những thuộc tính thật sự cần thiết như chiều dài, thời gian hoặc hướng đi. Chất lượng của mô hình phụ thuộc vào việc lựa chọn đúng đối tượng làm đỉnh và đúng đối tượng làm cạnh; một mô hình sai có thể dẫn tới kết luận Euler đúng về mặt toán học nhưng không phản ánh nhiệm vụ thực tế.

Đơn đồ thị phù hợp khi giữa hai đỉnh có nhiều nhất một cạnh và không có khuyên. Trong các mạng thực, hai tuyến đường khác nhau có thể cùng nối một cặp nút giao, hoặc một tuyến có thể xuất phát và kết thúc tại cùng một địa điểm; khi đó phải dùng đa đồ thị. Việc cho phép cạnh song song không làm thay đổi định lý Euler, nhưng ảnh hưởng đến cách lưu trữ và cách kiểm tra hành trình, vì mỗi bản sao của cạnh phải được đánh dấu độc lập.

Dãy bậc của đồ thị là danh sách các bậc được sắp theo một thứ tự nhất định. Dây bậc cung cấp nhiều thông tin nhanh: tổng dãy phải chẵn; số phần tử lẻ phải chẵn; nếu đồ thị có chu trình Euler thì mọi phần tử trong dãy bậc đều chẵn. Tuy nhiên, dãy bậc không quyết định hoàn toàn cấu trúc đồ thị. Hai đồ thị không đẳng cấu có thể có cùng dãy bậc, vì vậy sau khi kiểm tra bậc vẫn phải kiểm tra tính liên thông.

Đối với một bài toán Euler, các đỉnh cô lập có thể được loại ra khỏi bước kiểm tra liên thông, vì không có cạnh nào cần đi qua tại các đỉnh đó. Cách phát biểu chặt chẽ là đồ thị con sinh bởi các đỉnh có bậc dương phải liên thông. Quy ước này đặc biệt hữu ích khi dữ liệu được lấy từ một tập nút giao lớn nhưng chỉ một phần của mạng có các đoạn bắt buộc.

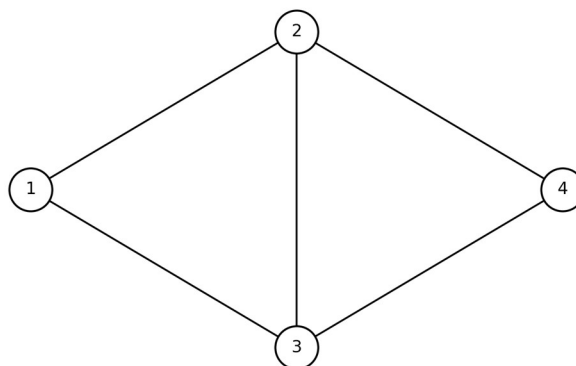
Một cạnh cầu cho biết mạng có một điểm nối độc nhất giữa hai miền. Nếu một đường đi kín sử dụng cầu đúng một lần, sau khi đi từ miền này sang miền kia không thể quay trở lại mà không đi lại chính cạnh đó. Bởi vậy, đồ thị Euler không có cầu, trừ trường hợp đồ thị chỉ gồm một đỉnh với các khuyên. Nhận xét này vừa là hệ quả của định lý Euler, vừa giải thích trực giác của thuật toán Fleury: tránh đi qua cầu khi vẫn còn lựa chọn khác.

Để xử lý bằng máy tính, đồ thị có thể được biểu diễn bằng ma trận kề, ma trận liên thuộc hoặc danh sách kề. Ma trận kề thuận lợi khi cần kiểm tra nhanh hai đỉnh có kề nhau hay không, nhưng tốn bộ nhớ bậc hai theo số đỉnh. Danh sách kề phù hợp hơn với đồ thị thưa và là lựa chọn tự nhiên cho thuật toán Hierholzer, vì ta thường xuyên cần lấy một cạnh chưa dùng liên thuộc với đỉnh hiện tại.

$$A = (a_{ij})_{n \times n}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E, \\ 0, & v_i v_j \notin E, \end{cases}$$

$$B = (b_{ve}), \quad b_{ve} = \begin{cases} 1, & v \text{ liên thuộc với } e, \\ 0, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Ví dụ. Với đồ thị ở sau, tập cạnh là $\{12, 13, 23, 24, 34\}$. Dãy bậc bằng $(2, 3, 3, 2)$, nên có đúng hai đỉnh lẻ là 2 và 3. Đồ thị liên thông, vì vậy nó không có chu trình Euler nhưng có đường đi Euler bắt đầu tại 2 và kết thúc tại 3, chẳng hạn $2-1-3-4-2-3$. Nếu thêm một cạnh song song giữa 2 và 3, cả hai bậc lẻ tăng thêm một và trở thành chẵn; đa đồ thị mới có chu trình Euler.



Nhận xét. Việc thêm một cạnh làm đổi tính chẵn lẻ tại đúng hai đầu mút. Tổng quát hơn, thêm một đường đi giữa u và v làm đổi tính chẵn lẻ tại u và v , còn tại mỗi đỉnh trung gian có hai cạnh mới liên thuộc nên tính chẵn lẻ không đổi. Đây là nguyên lý nền tảng để làm chẵn các đỉnh lẻ trong bài toán người đưa thư Trung Hoa.

2.2. Đường đi và chu trình

Định nghĩa. Một bước đi trong đồ thị G là một dãy xen kẽ $v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$, trong đó e_i có hai đầu mút v_{i-1} và v_i . Độ dài của bước đi là số cạnh k . Bước đi được gọi là kín nếu $v_0 = v_k$. Nếu các cạnh đôi một khác nhau thì bước đi là một đường đi; nếu các đỉnh đôi một khác nhau, trừ khả năng $v_0 = v_k$, thì đó là một đường đi hoặc một chu trình theo trường hợp hở hay kín.

Thuật ngữ “đường đi Euler” đôi khi được dùng cho một đường đi đi qua mọi cạnh đúng một lần. Để tránh nhầm với đường đi không lặp đỉnh, báo cáo sử dụng thuật ngữ đường đi Euler cho trường hợp hở và chu trình Euler cho trường hợp kín. Một đồ thị có chu trình Euler được gọi là đồ thị Euler; một đồ thị có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler thường được gọi là đồ thị nửa Euler.

Định nghĩa. Một đường đi Euler của G là một đường đi chứa mọi cạnh của G . Nếu đường đi đó kín thì nó là một chu trình Euler. Hai đầu mút của đường đi Euler hở được gọi là đỉnh đầu và đỉnh cuối.

Bậc của các đỉnh liên hệ trực tiếp với một đường đi Euler. Mỗi lần đường đi đi vào một đỉnh trung gian qua một cạnh, nó phải rời đỉnh đó qua một cạnh khác chưa dùng. Vì vậy, các cạnh liên thuộc với đỉnh trung gian được ghép thành từng cặp “vào-ra”. Đối với chu trình kín, điều này đúng cả tại đỉnh xuất phát; còn đối với đường đi hở, đỉnh đầu có một lần đi ra không được ghép với lần đi vào và đỉnh cuối có một lần đi vào không được ghép với lần đi ra.

Mệnh đề. Nếu G có một chu trình Euler thì mọi đỉnh có bậc dương của G đều có bậc chẵn. Nếu G có một đường đi Euler hở từ s đến t thì s và t có bậc lẻ, còn mọi đỉnh khác có bậc chẵn.

Chứng minh. Dọc theo đường đi, tại mỗi đỉnh trung gian các cạnh được sử dụng thành từng cặp: một cạnh đi vào và một cạnh đi ra. Với chu trình kín, đỉnh xuất phát cũng đồng thời là đỉnh kết thúc nên các cạnh tại đó cũng được ghép cặp. Với đường đi hở, chỉ có s thừa một cạnh đi ra và t thừa một cạnh đi vào. Do đường đi sử dụng mọi cạnh, kết luận đúng cho bậc trong toàn đồ thị.

Điều kiện chẵn lẻ ở trên là cần. Phần khó hơn là chứng minh nó cũng đủ khi đồ thị liên thông. Một công cụ quan trọng là khả năng tách một bước đi kín không lặp cạnh thành các chu trình và sau đó ghép các chu trình tại các đỉnh chung.

Bổ đề. Mọi đồ thị hữu hạn có bậc tối thiểu ít nhất 2 đều chứa một chu trình.

Chứng minh. Bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ và liên tiếp đi sang một đỉnh kề chưa xuất hiện trong dãy nếu có thể. Vì đồ thị hữu hạn, quá trình cuối cùng phải gặp lại một đỉnh đã xuất hiện hoặc dừng lại. Nó không thể dừng tại một đỉnh mới, bởi đỉnh đó có ít nhất hai cạnh và chỉ một cạnh vừa được dùng để đi vào. Do đó một đỉnh được lặp lại, và đoạn giữa hai lần xuất hiện liên tiếp tạo thành một chu trình.

Bổ đề. Nếu G là đồ thị liên thông và mọi đỉnh đều có bậc chẵn thì từ bất kỳ đỉnh v nào có bậc dương, luôn tồn tại một đường đi kín không rỗng bắt đầu tại v .

Chứng minh. Xuất phát từ v và mỗi bước chọn một cạnh chưa sử dụng liên thuộc với đỉnh hiện tại. Khi đi vào một đỉnh khác v , số cạnh chưa sử dụng tại đỉnh đó không thể trở thành 0 ngay sau lần đi vào đầu tiên, vì bậc ban đầu chẵn và các lần sử dụng trước đó tiêu thụ cạnh theo cặp vào-ra. Do đồ thị hữu hạn, quá trình cuối cùng phải dừng; đỉnh dừng duy nhất có thể là v . Ta thu được một đường đi kín.

Bổ đề này chứa hạt nhân của thuật toán Hierholzer. Nếu đường đi kín đầu tiên chưa dùng hết cạnh, tính liên thông bảo đảm có một đỉnh trên đường đi còn liên thuộc với cạnh chưa dùng. Từ đỉnh đó, ta xây dựng một đường đi kín mới trong phần cạnh còn lại rồi chèn nó vào đường đi cũ. Lặp lại hữu hạn lần sẽ thu được chu trình Euler.

Sự không duy nhất của chu trình Euler là hiện tượng phổ biến. Tại một đỉnh bậc lớn, có nhiều cách ghép cặp các cạnh vào-ra, dẫn đến nhiều hành trình khác nhau. Trong ứng

dụng không trọng số, mọi chu trình Euler đều có cùng số cạnh. Trong ứng dụng có thêm chi phí rẽ, thời gian hoặc ràng buộc thứ tự, việc chọn một chu trình cụ thể có thể trở thành một bài toán tối ưu bổ sung.

Nhận xét. Một bước đi kín sử dụng mỗi cạnh không quá một lần thường được gọi là một mạch. Mỗi mạch có thể phân rã thành các chu trình đôi một không chung cạnh. Đối với đồ thị Euler, toàn bộ tập cạnh có thể được phân hoạch thành các chu trình; thuật toán Hierholzer thực hiện thao tác ngược lại bằng cách ghép các chu trình thành một chu trình duy nhất.

Khái niệm đường đi Euler cũng áp dụng cho đồ thị không liên thông theo nghĩa hình thức, nhưng khi có cạnh ở hai thành phần khác nhau thì không một bước đi liên tục nào có thể chứa tất cả chúng. Vì vậy, điều kiện liên thông của phần đồ thị có bậc dương là bắt buộc. Đây là điều kiện toàn cục, trong khi điều kiện bậc là điều kiện cục bộ; định lý Euler là một ví dụ đẹp về việc kết hợp một điều kiện toàn cục đơn giản với một điều kiện cục bộ đơn giản để đặc trưng hoàn toàn một cấu trúc.

Ví dụ. Xét đồ thị gồm một hình vuông và một tam giác rời nhau. Mọi đỉnh đều có bậc 2, nhưng đồ thị không có chu trình Euler đi qua mọi cạnh vì không thể chuyển từ thành phần này sang thành phần kia. Nếu nối hai thành phần bằng một cạnh, hai đầu của cạnh nối trở thành đỉnh lẻ; đồ thị mới liên thông nhưng vẫn không Euler. Nếu nối chúng bằng hai cạnh thích hợp để các bậc vẫn chẵn, đồ thị có thể trở thành Euler.

Trong bài toán thực tiễn, tính liên thông thường được kiểm tra bằng tìm kiếm theo chiều sâu hoặc chiều rộng. Hai thuật toán này thăm mỗi đỉnh và mỗi cạnh số lần hữu hạn, do đó có độ phức tạp $O(|V| + |E|)$ khi đồ thị được lưu bằng danh sách kề. Cùng với việc đếm bậc, ta có thể kiểm tra điều kiện Euler trong thời gian tuyến tính.

Nếu đồ thị có đúng hai đỉnh lẻ s và t , có thể thêm tạm một cạnh st . Đồ thị mới có mọi bậc chẵn; một chu trình Euler của đồ thị mới, sau khi bỏ cạnh thêm, trở thành đường đi Euler của đồ thị ban đầu từ s đến t . Lập luận này vừa chứng minh điều kiện đủ cho trường hợp nửa Euler, vừa cung cấp một cách xây dựng trực tiếp từ thuật toán tìm chu trình Euler.

Chú ý. Trong đa đồ thị, hai cạnh song song phải được xem là hai đối tượng khác nhau dù có cùng hai đầu mút. Khi lưu trữ bằng máy tính, mỗi cạnh nên có một mã nhận dạng riêng; nếu chỉ lưu cặp đỉnh, thuật toán có thể xóa nhầm cả hai cạnh hoặc sử dụng một cạnh nhiều lần.

Một cách kiểm tra đường đi Euler là lập bảng sử dụng cạnh. Với mỗi bước $v_{i-1} \rightarrow v_i$, ta xác định chính xác cạnh đã đi và đánh dấu nó. Sau khi kết thúc, cần đồng thời kiểm tra ba điều kiện: các bước liên tiếp thật sự kề nhau; không cạnh nào xuất hiện hai lần; số cạnh đã đánh dấu bằng $|E|$. Chỉ kiểm tra dãy đỉnh là chưa đủ trong đa đồ thị, vì hai lần xuất hiện cùng cặp đỉnh có thể tương ứng với hai cạnh song song khác nhau.

Mỗi đường đi kín có thể tách thành các chu trình không chung cạnh. Nếu dãy đỉnh lặp lại một đỉnh trung gian, đoạn giữa hai lần xuất hiện liên tiếp của đỉnh đó tạo một chu trình; bỏ đoạn này và tiếp tục, ta thu được phép phân rã. Ngược lại, nếu nhiều chu trình có chung đỉnh, ta có thể ghép chúng thành một đường đi kín lớn hơn. Cặp thao tác tách–ghép này là nội dung cấu trúc phía sau chứng minh định lý Euler.

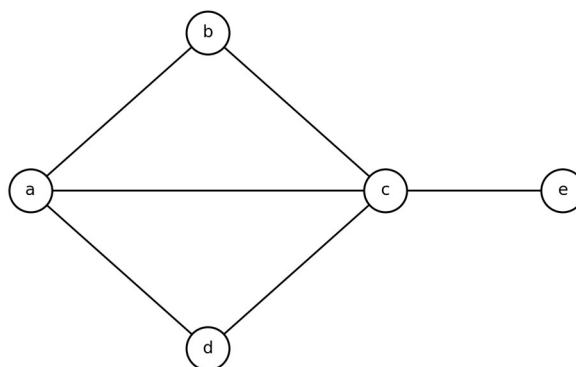
Ví dụ. Cho hai chu trình $C_1 = a-b-c-a$ và $C_2 = a-d-e-a$. Vì cùng đi qua a , ta có thể chèn C_2 vào C_1 tại a để được $a-d-e-a-b-c-a$. Nếu còn chu trình $C_3 = c-f-g-c$, tiếp tục chèn tại c . Thứ tự chèn khác nhau tạo ra các chu trình Euler khác nhau nhưng đều sử dụng cùng tập cạnh.

Khái niệm Euler và Hamilton thường xuất hiện cạnh nhau nhưng giải quyết hai loại nhiệm vụ khác nhau. Euler quan tâm đến cạnh, nên phù hợp với quét đường, kiểm tra đường dây hoặc vẽ nét. Hamilton quan tâm đến đỉnh, nên phù hợp với việc ghé thăm địa điểm. Việc dùng nhầm mô hình là một lỗi phổ biến: yêu cầu “đi qua mọi con đường” không phải là bài toán Hamilton, còn yêu cầu “ghé mỗi thành phố một lần” không phải là bài toán Euler.

Mệnh đề. Nếu một đường đi sử dụng mọi cạnh của đồ thị và bắt đầu ở s , kết thúc ở t , thì mọi đỉnh khác s, t có số lần vào bằng số lần ra. Vì vậy, tổng số cạnh được sử dụng tại mỗi đỉnh trung gian là chẵn. Nếu $s = t$, điều tương tự đúng tại đỉnh xuất phát; nếu s khác t , mỗi đầu mút còn thừa đúng một cạnh không ghép cặp. Lập luận này giải thích đầy đủ điều kiện cần về bậc mà không phụ thuộc vào hình vẽ.

Chú ý. Đường đi Euler có thể đi qua một đỉnh nhiều lần. Chẳng hạn chu trình 1–2–3–1–4–3–5–1 đi qua đỉnh 1 ba lần. Điều bị cấm là lặp cạnh. Khi chấm bài, việc gạch bỏ một đáp án chỉ vì dãy đỉnh có lặp là không đúng; phải đối chiếu với định nghĩa đường đi.

Ví dụ. Đồ thị sau có hai đỉnh lẻ c và e . Một đường đi Euler là $e-c-b-a-d-c-a$; nó bắt đầu và kết thúc tại hai đỉnh lẻ. Nếu yêu cầu hành trình kín, ta buộc phải lặp ít nhất một đường nối giữa c và e . Trong trường hợp cạnh ce đã tồn tại, việc nhân đôi cạnh đó tạo đồ thị Euler; nếu chưa có, ta có thể lặp một đường đi ngắn nhất giữa c và e .



2.3. Đồ thị có hướng, đa đồ thị và biểu diễn

Định nghĩa. Một đồ thị có hướng $D = (V, A)$ gồm tập đỉnh V và tập cung A ; mỗi cung a là một cặp có thứ tự (u, v) , đi từ đỉnh đầu u đến đỉnh cuối v . Bậc ra $d^+(v)$ là số cung đi ra khỏi v , còn bậc vào $d^-(v)$ là số cung đi vào v . Một khuyên có hướng đóng góp một đơn vị cho cả bậc vào và bậc ra.

Đối với đồ thị có hướng, sự cân bằng tại mỗi đỉnh được diễn đạt bằng đẳng thức giữa bậc vào và bậc ra. Đây là phiên bản có hướng của điều kiện bậc chẵn: trong một chu trình Euler, mỗi lần đi vào một đỉnh phải được ghép với một lần đi ra, và hướng của cung không được đảo ngược.

Định nghĩa. Đồ thị có hướng D được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng nhận được bằng cách bỏ hướng của các cung là liên thông. D được gọi là liên thông mạnh nếu với mọi cặp đỉnh u, v đều có đường đi có hướng từ u đến v và từ v đến u .

Đối với sự tồn tại của chu trình Euler có hướng, điều kiện cân bằng bậc cùng với việc tất cả các cung thuộc cùng một thành phần liên thông thích hợp là đủ. Có thể phát biểu theo hai cách tương đương: phần đồ thị gồm các đỉnh có bậc dương liên thông mạnh; hoặc đồ thị nền vô hướng liên thông và mọi đỉnh cân bằng bậc. Khi điều kiện cân bằng đúng, liên thông yếu kéo theo các cung có bậc dương nằm trong một thành phần mạnh duy nhất phù hợp cho chu trình Euler.

Mệnh đề. Trong mọi đồ thị có hướng hữu hạn, tổng bậc ra bằng tổng bậc vào và đều bằng số cung.

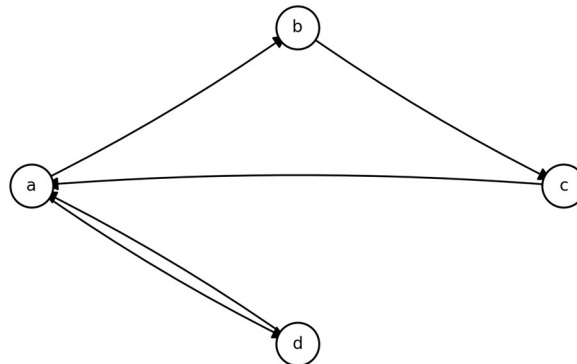
Định lý. Một đồ thị có hướng hữu hạn D có chu trình Euler nếu và chỉ nếu mọi đỉnh có bậc dương thuộc cùng một thành phần liên thông của đồ thị nền và $d^+(v) = d^-(v)$ với mọi v . D có đường đi Euler từ s đến t nếu và chỉ nếu đồ thị nền liên thông trên các đỉnh có bậc dương, $d^+(s) = d^-(s) + 1$, $d^-(t) = d^+(t) + 1$, và mọi đỉnh khác cân bằng bậc.

Ý tưởng chứng minh. Chiều cần thiết suy ra từ việc ghép cặp các lần đi vào và đi ra tại mỗi đỉnh. Với chiều đủ, thuật toán Hierholzer được áp dụng theo hướng của các cung: bắt đầu từ một đỉnh có cung đi ra, đi theo các cung chưa dùng cho đến khi quay lại điểm xuất phát. Điều kiện cân bằng ngăn quá trình mắc kẹt tại một đỉnh khác. Nếu còn cung chưa dùng, tiếp tục tạo mạch mới tại một đỉnh đã nằm trên mạch cũ và ghép chúng. Trường hợp hở được quy về trường hợp kín bằng cách thêm cung $t \rightarrow s$.

Đồ thị có hướng mô hình hóa các tuyến một chiều, các công đoạn có thứ tự và các kênh truyền có hướng. Trong chu trình Euler có hướng, mỗi cung phải được đi đúng chiều. Bởi vậy, tại mỗi đỉnh, số lần đi vào phải bằng số lần đi ra. Sự cân bằng này đóng vai trò giống bậc chẵn trong đồ thị vô hướng.

Ví dụ. Ở hình sau, các cung $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$, $c \rightarrow a$ tạo mạch thứ nhất; $a \rightarrow d$, $d \rightarrow a$ tạo mạch thứ hai. Ghép hai mạch tại a thu được chu trình $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow d \rightarrow a$. Nếu đổi hướng

$d \rightarrow a$ thành $a \rightarrow d$, đỉnh a thừa hai cung ra còn d thừa hai cung vào; đồ thị khi đó không có cả đường đi Euler hở.



Trong mạng hỗn hợp có cả đường một chiều và hai chiều, điều kiện Euler không còn chỉ là kiểm tra bậc chẵn hoặc cân bằng bậc. Ta phải chọn hướng sử dụng cho các cạnh hai chiều sao cho toàn mạng cân bằng, đồng thời bảo đảm liên thông. Báo cáo không đi sâu vào bài toán hỗn hợp, nhưng lưu ý rằng việc tự ý thay mọi cạnh hai chiều bằng hai cung ngược chiều có thể làm thay đổi yêu cầu “đi qua đoạn đường một lần” thành “đi qua mỗi chiều một lần”.

3. CHU TRÌNH EULER VÀ THUẬT TOÁN

3.1. Định lý Euler và các hệ quả

Bài toán bảy cây cầu ở Königsberg gồm bốn miền đất được nối bởi bảy cây cầu. Euler thay mỗi miền đất bằng một đỉnh và mỗi cây cầu bằng một cạnh. Hình dạng, độ dài và vị trí tương đối của các cây cầu không ảnh hưởng đến câu hỏi “đi qua mỗi cầu đúng một lần”; chỉ quan hệ liên thuộc giữa cầu và miền đất là quan trọng.

Định lý Euler. Cho G là một đa đồ thị vô hướng hữu hạn mà mọi đỉnh có bậc dương nằm trong cùng một thành phần liên thông. Khi đó: (i) G có chu trình Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh có bậc chẵn; (ii) G có đường đi Euler hở khi và chỉ khi G có đúng hai đỉnh bậc lẻ. Trong trường hợp (ii), hai đỉnh lẻ là hai đầu mút của mọi đường đi Euler [1]–[4].

Chiều cần thiết đã được chứng minh bằng lập luận ghép cặp các cạnh tại mỗi đỉnh. Hai trang tiếp theo trình bày chiều đủ theo phương pháp xây dựng, đồng thời làm rõ vì sao phương pháp này dẫn trực tiếp tới thuật toán Hierholzer.

Chứng minh trường hợp chu trình. Giả sử G liên thông trên các đỉnh có bậc dương và mọi đỉnh đều có bậc chẵn. Chọn một đỉnh v có bậc dương. Liên tiếp đi qua một cạnh chưa dùng từ đỉnh hiện tại. Do tính chẵn của bậc, quá trình không thể dừng tại một đỉnh khác v : mỗi lần đến một đỉnh khác, số cạnh đã sử dụng tại đó trước lần rời đi là lẻ, nên vẫn còn ít nhất một cạnh chưa sử dụng. Vì số cạnh hữu hạn, quá trình phải quay lại v và tạo một đường đi kín C .

Nếu C đã chứa mọi cạnh thì C là chu trình Euler. Nếu chưa, do G liên thông, tồn tại một đỉnh x trên C liên thuộc với cạnh chưa dùng. Xét đồ thị gồm các cạnh chưa dùng; tại mỗi đỉnh, số cạnh bị lấy khỏi G bởi C là chẵn, nên bậc còn lại vẫn chẵn. Bắt đầu từ x , áp dụng lập luận trên để thu được một đường đi kín C' chỉ dùng các cạnh chưa dùng. Chèn C' vào C tại x , ta được một đường đi kín dài hơn và không lặp cạnh. Lặp lại thao tác; mỗi lần số cạnh đã dùng tăng, nên sau hữu hạn bước ta thu được một chu trình chứa mọi cạnh.

Chứng minh trường hợp đường đi hở. Giả sử G có đúng hai đỉnh lẻ s và t . Thêm một cạnh mới $e = st$. Trong đồ thị G' thu được, bậc của s và t tăng thêm một, vì vậy mọi đỉnh đều chẵn; G' vẫn liên thông. Theo phần vừa chứng minh, G' có một chu trình Euler C . Xóa cạnh e khỏi C , chu trình bị cắt thành một đường đi đi từ s đến t và chứa mỗi cạnh của G đúng một lần. Ngược lại, nếu G có đường đi Euler hở thì hai đầu mút là hai đỉnh lẻ theo điều kiện cần.

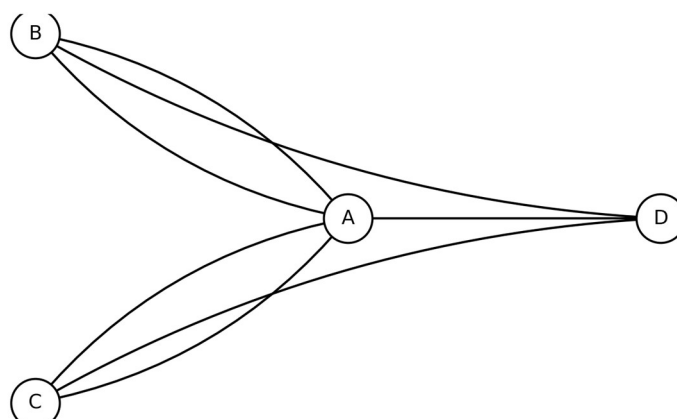
Hệ quả. Một đồ thị liên thông có chu trình Euler nếu và chỉ nếu tập cạnh của nó có thể được phân rã thành các chu trình đôi một không chung cạnh và các chu trình đó có thể được nối với nhau qua các đỉnh chung.

Định lý Euler có tính xây dựng: chứng minh không chỉ xác nhận sự tồn tại mà còn mô tả cách tìm hành trình. Đây là đặc điểm quan trọng trong toán học ứng dụng. Khi một

mạng có hàng triệu cạnh, việc biết rằng nghiệm tồn tại chưa đủ; cần một thuật toán tạo ra nghiệm với chi phí bộ nhớ và thời gian phù hợp.

Ví dụ. Xét một đồ thị liên thông có bốn đỉnh lẻ. Bất kỳ đường đi nào đi qua mỗi cạnh đúng một lần chỉ có tối đa hai đầu mút, nên không thể xử lý đồng thời bốn “độ lệch lẻ”. Muốn tạo một hành trình kín đi qua mọi cạnh ít nhất một lần, cần lắp thêm các đường đi để ghép cặp bốn đỉnh lẻ. Có ba cách ghép cặp về mặt tổ hợp; nếu cạnh có trọng số, ta chọn cách có tổng khoảng cách ngắn nhất.

Bài toán bảy cây cầu có giá trị phương pháp luận vì nó cho thấy sự khác nhau giữa dữ liệu hình học và dữ liệu liên thuộc. Vị trí chính xác của các miền đất, độ dài cầu hay góc giao nhau không quyết định khả năng thực hiện hành trình. Khi thay miền đất bằng đỉnh và cầu bằng cạnh, câu hỏi được rút về tính chẵn lẻ của bốn bậc. Các giáo trình đồ thị Việt Nam thường dùng bài toán này để minh họa sự ra đời của lý thuyết đồ thị.



Định lý Euler có hai thành phần độc lập. Điều kiện bậc kiểm soát khả năng “vào-ra” tại từng đỉnh; điều kiện liên thông bảo đảm tất cả cạnh thuộc cùng một mạng có thể tiếp cận. Nếu chỉ có bậc chẵn mà đồ thị gồm hai chu trình rời nhau, không có hành trình duy nhất đi qua cả hai. Nếu chỉ liên thông nhưng có bốn đỉnh lẻ, hành trình sẽ mắc sai lệch chẵn lẻ tại quá nhiều đầu mút.

Chứng minh bằng ghép chu trình là một chứng minh xây dựng. Ta không cần đoán trước chu trình Euler hoàn chỉnh. Chỉ cần tìm một mạch kín bất kì, sau đó giải bài toán tương tự trên phần cạnh còn lại và ghép kết quả. Số cạnh chưa dùng giảm nghiêm ngặt sau mỗi lần ghép, nên quá trình kết thúc hữu hạn. Ý tưởng này là nền tảng của thuật toán Hierholzer được trình bày ở Mục 3.3.

Hệ quả. Mọi cạnh của một đồ thị Euler nằm trên ít nhất một chu trình. Thật vậy, cạnh đó thuộc chu trình Euler; đoạn từ một đầu mút tới lần quay lại đầu mút qua cạnh đang xét tạo một chu trình chứa nó. Do đó, đồ thị Euler không có cầu. Ngược lại, không có cầu chưa đủ để là Euler, vì một đồ thị không cầu vẫn có thể có các đỉnh bậc lẻ.

Hệ quả. Nếu G là đồ thị Euler và x là một đỉnh bất kì có bậc dương, tồn tại một chu trình Euler bắt đầu tại x . Ta chỉ cần quay vòng cách viết của một chu trình Euler đã có để x đứng đầu. Trong ứng dụng, điều này cho phép chọn điểm xuất phát theo yêu cầu vận hành mà không làm thay đổi tổng chiều dài, miễn là mạng đã Euler.

Mệnh đề. Nếu xóa một chu trình khỏi một đồ thị có mọi đỉnh bậc chẵn, phần đồ thị còn lại vẫn có mọi đỉnh bậc chẵn. Tại mỗi đỉnh thuộc chu trình, ta xóa đúng hai cạnh liên thuộc; tại các đỉnh khác bậc không đổi. Đây là bất biến quan trọng trong chứng minh quy nạp và trong việc ghép các mạch.

Ví dụ. Chu trình C_n luôn là đồ thị Euler vì mọi đỉnh có bậc 2. Đồ thị đầy đủ K_n có bậc $n-1$ tại mỗi đỉnh, nên K_n Euler khi và chỉ khi n lẻ. Đồ thị hai phía đầy đủ $K_{m,n}$ có bậc n tại mỗi đỉnh thuộc phía thứ nhất và bậc m tại mỗi đỉnh thuộc phía thứ hai; vì vậy nó Euler khi và chỉ khi m và n đều chẵn.

Tính Euler không bảo toàn khi thêm một cạnh đơn lẻ, vì hai đầu mút đổi tính chẵn lẻ. Thêm một chu trình thì bậc mỗi đỉnh trên chu trình tăng 2 và tính chẵn lẻ không đổi. Do đó, ghép thêm một chu trình tại một đỉnh chung là một cách tự nhiên để mở rộng đồ thị Euler.

Chu trình Euler thường không duy nhất. Sự không duy nhất xuất hiện khi có nhiều lựa chọn cạnh chưa dùng tại một đỉnh. Trong các bài toán không trọng số, mọi chu trình Euler có cùng số bước $|E|$. Trong đồ thị có trọng số, nếu mỗi cạnh được đi đúng một lần thì mọi chu trình Euler vẫn có cùng chi phí bằng tổng trọng số cạnh; khác biệt chỉ nằm ở thứ tự thực hiện.

$$L(C) = \sum_{e \in E} w(e).$$

3.2. Quy trình nhận biết và giải bài toán

Đối với một bài toán cụ thể, nên thực hiện theo một quy trình cố định thay vì quan sát hình và đoán hành trình. Bước 1 là xác định mô hình đồ thị: liệt kê đỉnh, cạnh, hướng và trọng số. Bước 2 là loại các đỉnh cô lập khỏi phép kiểm tra liên thông. Bước 3 là tính bậc hoặc bán bậc. Bước 4 là áp dụng tiêu chuẩn Euler để xác định loại hành trình. Bước 5 mới xây dựng đường đi bằng thuật toán. Bước 6 kiểm tra lại số cạnh đã dùng.

Quy trình nhận biết cho đồ thị vô hướng có thể tóm tắt như sau: nếu phần có bậc dương không liên thông thì không có đường đi Euler; nếu liên thông và không có đỉnh lẻ thì có chu trình Euler; nếu có đúng hai đỉnh lẻ thì có đường đi Euler hở; nếu có từ bốn đỉnh lẻ trở lên thì không có đường đi Euler. Số đỉnh lẻ không thể là 1, 3 hoặc một số lẻ khác do bổ đề bắt tay.

Quy trình cho đồ thị có hướng gồm hai kiểm tra. Trước hết xét liên thông của đồ thị nền trên các đỉnh có bậc dương. Tiếp theo tính hiệu $\Delta(v) = d^+(v) - d^-(v)$. Nếu mọi hiệu bằng

0 thì có chu trình Euler; nếu có đúng một đỉnh hiệu 1, một đỉnh hiệu -1 và các đỉnh khác hiệu 0 thì có đường đi Euler hở; các trường hợp còn lại không có đường đi Euler [4], [6].

Ví dụ 1. Cho G có tập cạnh $\{12, 23, 34, 41, 13, 35, 51\}$. Ta tính được $d(1)=4$, $d(2)=2$, $d(3)=4$, $d(4)=2$, $d(5)=2$. Đồ thị liên thông và không có đỉnh lẻ, nên có chu trình Euler. Một đáp án là $1-2-3-5-1-4-3-1$. Khi kiểm tra, bảy cặp liên tiếp tương ứng đúng bảy cạnh đã cho.

Ví dụ 2. Cho H có tập cạnh $\{ab, bc, cd, da, ac, ce\}$. Bậc của c bằng 4, bậc của e bằng 1, bậc của a bằng 3, còn b và d bằng 2. Hai đỉnh lẻ là a và e ; vì H liên thông, đường đi Euler phải bắt đầu tại một trong hai đỉnh này và kết thúc tại đỉnh kia. Một đường đi là $e-c-b-a-d-c-a$.

Ví dụ 3. Cho đồ thị gồm hai chu trình $a-b-c-a$ và $d-e-f-d$, không có cạnh nối giữa hai chu trình. Mọi đỉnh đều bậc 2 nhưng đồ thị không liên thông. Vì vậy không có chu trình Euler của toàn đồ thị. Có thể tìm một chu trình Euler riêng trong mỗi thành phần, nhưng không thể nối chúng thành một hành trình liên tục nếu không bổ sung cạnh.

Ví dụ 4. Cho đồ thị có bốn đỉnh lẻ p, q, r, s . Không cần thử đường đi cụ thể, ta kết luận ngay không có đường đi Euler. Nếu mục tiêu đổi thành “đi qua mỗi cạnh ít nhất một lần và trở lại điểm xuất phát”, ta phải bổ sung các đường đi ghép cặp bốn đỉnh lẻ; đây là bước chuyển sang bài toán người đưa thư Trung Hoa.

Ví dụ 5. Với đồ thị có hướng gồm các cung $a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow a, a \rightarrow d, d \rightarrow a$, mọi đỉnh cân bằng và đồ thị nền liên thông, nên có chu trình Euler. Nếu thêm cung $a \rightarrow b$ mà không thêm cung $b \rightarrow a$, hiệu bậc tại a và b thay đổi; đồ thị mới có thể trở thành nửa Euler nếu các hiệu lần lượt là 1 và -1 , hoặc không Euler nếu sai lệch lớn hơn một.

Chú ý. Khi tính bậc trong đa đồ thị, mỗi cạnh song song được đếm riêng và khuyên được đếm hai lần. Bỏ qua quy tắc này có thể làm thay đổi kết luận. Một khuyên tự nó là một chu trình độ dài 1 và không tạo đỉnh lẻ, vì đóng góp 2 vào bậc.

Mệnh đề. Có thể biến một đồ thị nửa Euler thành đồ thị Euler bằng cách thêm một cạnh giữa hai đỉnh lẻ. Ngược lại, xóa một cạnh bất kì khỏi một đồ thị Euler liên thông làm hai đầu mút của cạnh trở thành lẻ; nếu phần còn lại vẫn liên thông thì thu được đồ thị nửa Euler. Mệnh đề cho phép thiết kế bài tập theo hai chiều: dựng chu trình từ đường đi hoặc dựng đường đi từ chu trình.

Bài toán tối thiểu cạnh bổ sung không trọng số. Nếu được phép thêm cạnh giữa mọi cặp đỉnh, đồ thị liên thông có $2k$ đỉnh lẻ cần ít nhất k cạnh bổ sung để trở thành Euler, vì mỗi cạnh chỉ đổi tính chẵn lẻ tại hai đầu mút. Ghép các đỉnh lẻ thành k cặp và thêm một cạnh cho mỗi cặp đạt được cận này. Nếu chỉ được phép lập các cạnh có sẵn, ta phải thêm các đường đi và tối ưu tổng độ dài.

3.3. Thuật toán Fleury và Hierholzer

Thuật toán Fleury. Giả sử G là đồ thị Euler. Chọn một đỉnh bắt đầu. Tại mỗi bước, trong số các cạnh chưa dùng liên thuộc với đỉnh hiện tại, chọn một cạnh không phải là cầu của đồ thị còn lại nếu có; chỉ đi qua cầu khi đó là lựa chọn duy nhất. Xóa cạnh vừa dùng và tiếp tục cho đến khi không còn cạnh.

Quy tắc tránh cầu bảo đảm hành trình không tách khỏi các cạnh chưa dùng. Nếu chọn một cầu trong khi còn lựa chọn khác, việc xóa cầu có thể để lại một thành phần chứa cạnh chưa dùng mà không thể quay lại. Fleury rất trực quan và thích hợp để giải bằng tay, nhưng mỗi bước có thể phải kiểm tra một hoặc nhiều cạnh có phải cầu hay không. Nếu kiểm tra cầu bằng tìm kiếm lại từ đầu, thời gian có thể tăng đến bậc hai theo số cạnh.

Các bước của Fleury. Đối với đồ thị có đúng hai đỉnh lẻ, bắt đầu tại một trong hai đỉnh lẻ; đối với đồ thị Euler, bắt đầu tại đỉnh bất kỳ có bậc dương. Sau đó lặp: (1) liệt kê các cạnh chưa dùng tại đỉnh hiện tại; (2) nếu chỉ có một cạnh thì chọn cạnh đó; (3) nếu có nhiều cạnh, chọn một cạnh không phải cầu trong đồ thị còn lại; (4) đánh dấu cạnh đã dùng và chuyển sang đầu mút kia.

Nhận xét. Fleury phụ thuộc vào việc nhận biết cầu trong đồ thị động. Có thể cải thiện bằng các cấu trúc dữ liệu phức tạp, nhưng thuật toán Hierholzer đơn giản hơn và đạt thời gian tuyến tính khi dùng danh sách kề cùng cơ chế xóa hoặc đánh dấu cạnh.

Thuật toán Hierholzer. Chọn một đỉnh s có bậc dương. Từ s , liên tiếp đi theo các cạnh chưa dùng cho đến khi quay lại s , thu được một mạch C . Nếu C chứa mọi cạnh thì kết thúc. Nếu còn cạnh chưa dùng, chọn một đỉnh v trên C còn liên thuộc với cạnh chưa dùng, xây dựng một mạch C' trong phần cạnh chưa dùng bắt đầu và kết thúc tại v , rồi chèn C' vào C . Lặp lại cho đến khi mọi cạnh đã được dùng.

Tính đúng đắn. Mỗi mạch được tạo chỉ sử dụng các cạnh chưa dùng, nên sau khi chèn, đường đi mới vẫn không lặp cạnh. Điều kiện mọi bậc chẵn bảo đảm mỗi mạch con quay về đỉnh xuất phát. Nếu còn cạnh chưa dùng, tính liên thông bảo đảm có một đỉnh trên mạch hiện tại tiếp xúc với phần chưa dùng; nếu không, các cạnh chưa dùng nằm trong một thành phần tách biệt, mâu thuẫn với liên thông của đồ thị ban đầu. Do số cạnh hữu hạn, thuật toán kết thúc và sử dụng toàn bộ cạnh.

Một cài đặt hiệu quả không cần tạo và chèn các danh sách dài nhiều lần. Ta dùng một ngăn xếp. Đỉnh hiện tại nằm trên đỉnh ngăn xếp; nếu còn cạnh chưa dùng thì đi theo cạnh đó và đẩy đỉnh mới vào ngăn xếp. Nếu không còn cạnh, lấy đỉnh ra khỏi ngăn xếp và thêm nó vào đầu danh sách kết quả. Danh sách thu được theo thứ tự ngược là chu trình Euler.

Giả mã. Có thể mô tả phiên bản ngăn xếp của Hierholzer như sau:

1. Đưa đỉnh bắt đầu s vào ngăn xếp S ; khởi tạo danh sách C rỗng.

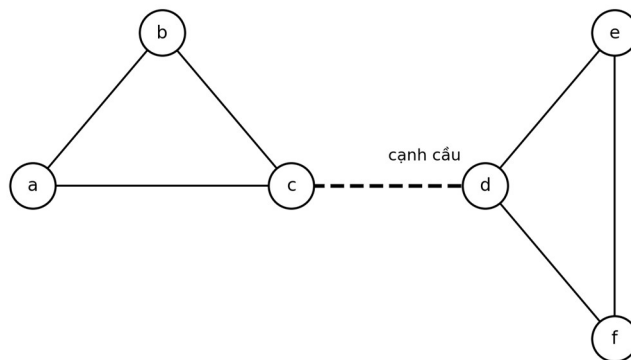
2. Trong khi S không rỗng, đặt v là phần tử trên cùng của S .
3. Nếu v còn cạnh chưa dùng $e = vw$, đánh dấu e và đưa w vào S .
4. Nếu v không còn cạnh chưa dùng, lấy v khỏi S và thêm v vào cuối C .
5. Đảo thứ tự C để nhận dãy đỉnh của chu trình Euler.

Mỗi cạnh được xét và đánh dấu đúng một lần. Mỗi đỉnh được đẩy vào và lấy ra khỏi ngăn xếp số lần tỷ lệ với số cạnh liên thuộc. Với danh sách kề và con trỏ tới cạnh chưa dùng tiếp theo, độ phức tạp thời gian là tuyến tính; bộ nhớ cần thiết cũng tuyến tính.

Kiểm tra đầu vào. Trước khi chạy thuật toán, cần bỏ qua các đỉnh cô lập, kiểm tra phần còn lại liên thông và đếm số đỉnh lẻ. Nếu số đỉnh lẻ bằng 0, tìm chu trình Euler. Nếu bằng 2, bắt đầu tại một đỉnh lẻ để tìm đường đi Euler. Nếu khác 0 và 2, kết luận không tồn tại đường đi Euler. Với đồ thị có hướng, thay điều kiện bậc lẻ bằng điều kiện cân bằng bậc vào–ra.

Chú ý về cài đặt. Trong đa đồ thị, cạnh phải có mã riêng. Khi đi qua $e = uv$, cần đánh dấu đúng bản sao e ở cả danh sách kề của u và v . Một cách phổ biến là lưu cùng một mã cạnh trong hai mục kề. Đối với khuyên, cạnh xuất hiện hai lần trong danh sách kề của cùng một đỉnh nhưng chỉ được đánh dấu một lần.

Trong môi trường xử lý dữ liệu lớn, thứ tự cạnh trong danh sách kề có thể ảnh hưởng chu trình được tạo ra nhưng không ảnh hưởng tính đúng đắn. Nếu cần ưu tiên một quy tắc như chọn cạnh có nhãn nhỏ nhất, hạn chế quay đầu hoặc tuân thủ thứ tự phục vụ, ta có thể sắp xếp hoặc dùng hàng đợi ưu tiên; khi đó độ phức tạp có thể tăng và cần chứng minh thêm rằng quy tắc không phá vỡ điều kiện khả thi.

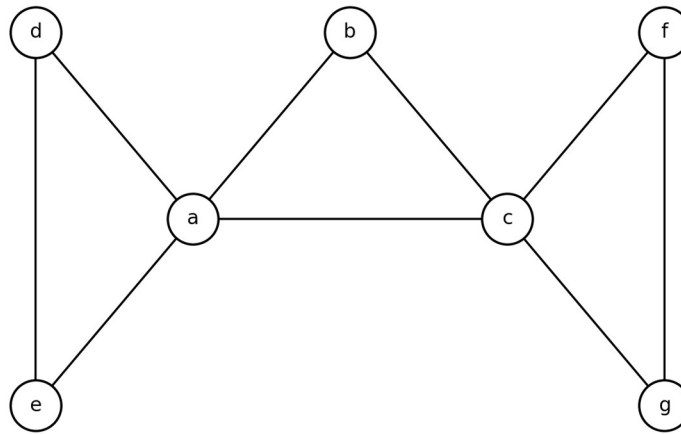


Cạnh cầu cần tránh khi áp dụng thuật toán Fleury

Thuật toán Fleury có ưu điểm trực quan: tại mỗi bước, nếu còn nhiều cạnh, không chọn cạnh cầu của phần đồ thị chưa dùng. Quy tắc này bảo đảm ta không tự tách các cạnh còn lại thành một thành phần không thể quay lại. Nếu chỉ còn một cạnh tại đỉnh hiện tại, ta buộc phải sử dụng nó dù đó là cầu. Đối với đồ thị nửa Euler, điểm bắt đầu phải là một đỉnh lẻ.

Tính đúng đắn của Fleury có thể hiểu qua bất biến sau: sau mỗi bước, các cạnh chưa dùng có nhiều nhất một thành phần chứa cạnh liên thuộc với vị trí hiện tại; mọi thành phần khác đã được xử lý xong. Việc tránh cầu giữ cho phần chưa dùng vẫn có đường tiếp tục. Khi không còn lựa chọn khác, đi qua cầu không gây mất cạnh vì phần phía sau chính là phần duy nhất còn lại.

Điểm yếu của Fleury là kiểm tra cầu nhiều lần. Cách đơn giản nhất là tạm xóa cạnh, chạy duyệt để xem số đỉnh tới được có giảm hay không, sau đó khôi phục. Nếu làm như vậy ở mỗi bước, thời gian có thể tăng tới bậc hai theo số cạnh. Với bài tập nhỏ điều này không đáng kể, nhưng với mạng lớn, Hierholzer hiệu quả hơn.



Ghép các mạch trong thuật toán Hierholzer

Phiên bản ngắn xếp của Hierholzer tránh thao tác chèn danh sách nhiều lần. Khi đỉnh trên cùng của ngắn xếp còn cạnh chưa dùng, ta đi theo cạnh đó và đẩy đỉnh mới. Khi không còn cạnh, ta lấy đỉnh khỏi ngắn xếp và đưa vào đầu kết quả. Thứ tự lấy ra chính là thứ tự ngược của chu trình Euler, bởi một đỉnh chỉ được ghi khi mọi cạnh đi tiếp từ nó đã hoàn tất.

Bất biến của thuật toán là: các cạnh đã đánh dấu tạo thành một họ các đường đi nằm trên ngắn xếp và phần kết quả; không cạnh nào bị dùng hai lần. Khi một đỉnh được đưa vào kết quả, không còn cạnh chưa dùng liên thuộc với nó. Nếu đầu vào thỏa điều kiện Euler, thuật toán chỉ kết thúc sau khi mọi cạnh đã được đánh dấu.

Độ phức tạp tuyến tính đạt được khi mỗi cạnh có mã riêng và mỗi mục trong danh sách kề chỉ được bỏ qua một số hữu hạn lần. Ta giữ một con trỏ $\text{next}[v]$ tới vị trí chưa xét tiếp theo trong danh sách kề. Mỗi khi gặp cạnh đã dùng, tăng con trỏ; mỗi cạnh xuất hiện hai lần trong danh sách kề của đồ thị vô hướng, nên tổng số lần tăng con trỏ là $O(m)$.

$$T(n, m) = O(n + m)$$

Giả mã chi tiết cho đồ thị vô hướng: (1) kiểm tra liên thông và số đỉnh lẻ; (2) chọn s là một đỉnh lẻ nếu có hai đỉnh lẻ, ngược lại chọn đỉnh bậc dương bất kỳ; (3) đưa s vào

ngăn xếp; (4) trong khi ngăn xếp không rỗng, nếu đỉnh trên cùng còn cạnh chưa dùng thì đánh dấu cạnh và đẩy đầu mút kia, nếu không thì lấy đỉnh đó ra và ghi vào kết quả; (5) đảo kết quả; (6) kiểm tra số cạnh của hành trình bằng m .

Đối với đồ thị có hướng, danh sách kề chỉ lưu các cung đi ra. Khi dùng cung $u \rightarrow v$, đánh dấu cung đó và chuyển tới v . Điều kiện cân bằng bậc bảo đảm quá trình tạo mạch không mắc kẹt ở đỉnh khác điểm xuất phát. Trường hợp nửa Euler, chọn đỉnh có $d^+ = d^- + 1$ làm điểm đầu.

Đối với khuyên, đi qua khuyên giữ nguyên đỉnh hiện tại nhưng cạnh vẫn phải được đánh dấu. Đối với cạnh song song, hai mã cạnh khác nhau có thể dẫn tới cùng đỉnh kế tiếp. Nếu cài đặt chỉ xóa theo cặp đầu mút, một thao tác có thể xóa nhầm nhiều bản sao; đây là lỗi phổ biến khi sinh viên dùng ma trận kề 0–1 cho đa đồ thị.

Thuật toán Fleury dễ giải thích bằng hình vẽ và phù hợp với hoạt động “không đi qua cầu quá sớm”. Thuật toán Hierholzer phản ánh trực tiếp chứng minh định lý Euler, không cần kiểm tra cầu và có độ phức tạp tuyến tính.

4. KẾT LUẬN

Ý tưởng Euler xuất hiện trong nhiều bài toán thực tế mà đối tượng cần phục vụ nằm trên các cạnh của mạng lưới: phát thư, thu gom rác, quét đường, kiểm tra đường ống, tuần tra, bảo trì cáp, phun thuốc hoặc kiểm tra mạng điện. Khi mạng chưa phải là đồ thị Euler, yêu cầu “đi qua mọi cạnh” được chuyển thành bài toán bổ sung một số lần đi lặp với tổng chi phí nhỏ nhất; đó là bài toán người đưa thư Trung Hoa, một mô hình quan trọng của tối ưu hóa tuyến trên cạnh. Các giáo trình và bài giảng toán rời rạc của Việt Nam thường sử dụng mô hình này để làm rõ mối liên hệ giữa bậc đỉnh, đường đi ngắn nhất, ghép cặp các đỉnh lẻ và việc xây dựng một hành trình phục vụ toàn bộ mạng.

Báo cáo này trình bày một cách hệ thống các kiến thức cần thiết về đồ thị, bậc, tính liên thông, đường đi, đường đi, chu trình, đồ thị có hướng và đa đồ thị. Trên cơ sở đó, báo cáo phát biểu và chứng minh các định lý đặc trưng cho đồ thị Euler, mô tả thuật toán Fleury và thuật toán Hierholzer, phân tích tính đúng đắn và độ phức tạp, đồng thời minh họa bằng các ví dụ cụ thể.

Phần ứng dụng tập trung vào bài toán vẽ một nét, bài toán người đưa thư Trung Hoa, tổ chức tuyến kiểm tra - bảo trì và dạy học chu trình Euler trong chương trình toán học ở Việt Nam. Cách trình bày hướng tới người đọc là giảng viên và sinh viên, do đó vừa chú trọng tính chính xác toán học, vừa nhấn mạnh khả năng vận dụng.

5. TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Đức Nghĩa, Nguyễn Tô Thành, *Toán rời rạc*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2001.
- [2] Đặng Huy Ruận, *Lý thuyết đồ thị và ứng dụng*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2000.
- [3] Nguyễn Thanh Hùng, Nguyễn Đức Nghĩa, *Giáo trình Lý thuyết đồ thị*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2007.
- [4] Khoa Công nghệ thông tin, Học viện Nông nghiệp Việt Nam, *Bài giảng Toán rời rạc*.
- [5] Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, *Toán rời rạc 2*.
- [6] Trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông Việt – Hàn, *Toán rời rạc*.