



# FTDS

Faculty of Technology and Data Science  
Foreign Trade University

# SCIENTIFIC CONFERENCE

**APPLIED MATHEMATICS,  
COMPUTER SCIENCE,  
DATA SCIENCE AND AI**

*in Research and Teaching  
at the Faculty of Technology and Data Science*

CONFERENCE DATE

**16<sup>th</sup>**  
**June**  
**2026**



Hanoi, June 2026

## **BAN BIÊN TẬP KỈ YẾU**

1. ThS. Tô Thị Hải Yến, phó phụ trách khoa, trưởng bộ môn Tin
2. TS. Nguyễn Văn Tăng, phó trưởng khoa, phụ trách bộ môn KHMT&DL
3. TS. Phùng Duy Quang, trưởng bộ môn Toán
4. ThS. Trần Thị Thu Ngân, giảng viên bộ môn KHMT&DL
5. Phạm Quang Huy, trợ giảng Bộ môn KHMT & DL
6. Cao Khánh Lâm, trợ giảng Bộ môn KHMT & DL



## LỜI MỞ ĐẦU

Trong không khí toàn thể cán bộ, giảng viên của Nhà trường đang gấp rút hoàn thành các công việc kết thúc năm học 2025 – 2026 và chuẩn bị đón chào học kỳ hè 2026, Khoa Công nghệ và Khoa học dữ liệu tổ chức hội nghị khoa học cấp Khoa thường niên: **“HỘI THẢO ỨNG DỤNG TOÁN HỌC, KHOA HỌC MÁY TÍNH, KHOA HỌC DỮ LIỆU VÀ AI TRONG NGHIÊN CỨU VÀ GIẢNG DẠY LIÊN NGÀNH TẠI KHOA CN&KHDL”**. Các bài viết trong Hội thảo tập trung trao đổi, chia sẻ kinh nghiệm về việc ứng dụng các phương pháp giảng dạy hiện đại và các kết quả nghiên cứu trong lĩnh vực Toán học, Khoa học máy tính, Khoa học dữ liệu và Trí tuệ nhân tạo (AI) vào hoạt động đào tạo và nghiên cứu liên ngành. Nhiều báo cáo giới thiệu các hướng nghiên cứu và mô hình triển khai đã được áp dụng hiệu quả trong giảng dạy các học phần thuộc lĩnh vực Toán học, Tin học, Khoa học máy tính và Khoa học dữ liệu, góp phần nâng cao chất lượng đào tạo, năng lực nghiên cứu khoa học và năng lực đổi mới sáng tạo của đội ngũ giảng viên.

Bên cạnh đó, Hội thảo cũng công bố các kết quả nghiên cứu và ứng dụng mới trong lĩnh vực công nghệ số, phân tích dữ liệu, học máy, trí tuệ nhân tạo và Toán ứng dụng nhằm giải quyết các bài toán thực tiễn trong kinh tế, kinh doanh, giáo dục và quản trị. Những đóng góp này không chỉ thúc đẩy hoạt động nghiên cứu khoa học của Khoa Công nghệ và Khoa học dữ liệu mà còn góp phần phát triển các chương trình đào tạo Khoa học máy tính và Khoa học dữ liệu theo định hướng liên ngành tại Trường Đại học Ngoại thương.

Trong quá trình chuẩn bị và tổ chức Hội thảo, Ban Tổ chức đã nhận được nhiều bài viết có giá trị khoa học từ các giảng viên trong Khoa, các giảng viên tại Cơ sở II và các nhà khoa học đến từ các trường đại học, cơ sở đào tạo khác. Ban Tổ chức trân trọng ghi nhận và đánh giá cao sự tham gia tích cực, tinh thần trách nhiệm cùng những đóng góp quý báu của các tác giả trong quá trình nghiên cứu, biên soạn, hoàn thiện các báo cáo khoa học cũng như phối hợp chuẩn bị các điều kiện cần thiết cho Hội thảo.

Ban Tổ chức mong muốn tiếp tục nhận được những ý kiến trao đổi, góp ý xây dựng từ quý vị đại biểu, các nhà khoa học và độc giả nhằm góp phần nâng cao chất lượng

chuyên môn của Hội thảo cũng như các hoạt động nghiên cứu khoa học trong thời gian tới.

Nhân dịp này, Khoa Công nghệ và Khoa học dữ liệu chân thành gửi lời cảm ơn tới Đảng ủy, Ban Giám Hiệu Nhà trường, Phòng Quản lý Khoa học, Phòng Quản lý Đào tạo, Phòng Kế hoạch Tài chính cùng các đơn vị trong toàn trường đã ủng hộ, giúp đỡ và động viên các cán bộ, giảng viên Khoa Công nghệ & Khoa học dữ liệu trong công tác nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn các đại biểu đã tới dự và tham gia thảo luận đóng góp cho sự thành công của hội nghị.

**T/M Ban chủ nhiệm Khoa**

**P. Trưởng Khoa**

**ThS Tô Thị Hải Yến**

# MỤC LỤC

## ***Phần 1: Bộ Môn Khoa học máy tính***

1. Vai trò trung gian của công nghệ sản xuất trong tác động của độ mở thương mại tới hiệu quả logistics ..... 7  
*Đoàn Quang Hưng*  
*Trần Thị Hà Thương*  
*Đào Tùng Khánh*  
*Nguyễn Trần Đăng Khánh*  
*Trần Đức Huy*
2. Chiến lược quản trị công nghệ trong kỷ nguyên trí tuệ nhân tạo: tổng quan các nghiên cứu và xu hướng phát triển ..... 38  
*TS. Trần Trọng Huy*
3. Meta learning for few-shot medical text classification ..... 45  
*Minh Tran*  
*Pankaj Sharma*  
*Imran Qureshi*
4. A hybrid knowledge graph-based rag and agentic ai framework for financial report analysis ..... 58  
*Nguyễn Văn Tăng*  
*Nguyen Duc Anh*
5. Ứng dụng trí tuệ nhân tạo vào việc phân tích và dự đoán các luồng di chuyển xe taxi tại hà nội..... 67  
*Nguyễn Văn Tăng*  
*Trần Thị Thu Ngân*
6. A financial table dataset for table detection and structure recognition with an interactive annotation tool ..... 82  
*Nguyen Van Tang*
7. Phân loại và khám phá quy luật năng lực số của giáo viên tại Hà Tĩnh bằng phương pháp machine learning: bằng chứng từ mô hình cây quyết định ..... 94  
*Phạm Thị Kim Dung*

|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8. Coordinated charging in Multi-Agent systems: .....                                            | 104 |
| <i>Pham Thi Kim Dung</i>                                                                         |     |
| 9. An optimization and game-theoretic interaction framework .....                                | 104 |
| <i>Pham Thi Kim Dung</i>                                                                         |     |
| 10. Improving financial forecasting with adaptive window mechanisms in<br>generative models..... | 113 |
| <i>Pham Thi Kim Dung</i>                                                                         |     |
| 11. Group testing with run length limited constraints.....                                       | 126 |
| <i>Pham Quang Huy</i>                                                                            |     |

## ***Phần 2: Bộ môn Toán***

|                                                                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 12. The application of is-lm model in analyzing the effects of fiscal and monetary<br>policies on the unemployment rate.....                | 134 |
| <i>MSc. Phan Thi Huong</i>                                                                                                                  |     |
| 13. Relationship between inflation and economic growth .....                                                                                | 152 |
| <i>MSc. Phan Thi Huong</i>                                                                                                                  |     |
| 14. Resource misallocation in Vietnamese manufacturing: evidence from total<br>factor productivity dispersion analysis.....                 | 164 |
| <i>ThS. Nguyễn Hữu Thịnh</i>                                                                                                                |     |
| 15. Nghiên cứu tính chất của giá trị riêng lớn thứ hai trong ma trận Leslie ngẫu<br>nhiên .....                                             | 173 |
| <i>ThS. Lê Thị Hương Giang</i>                                                                                                              |     |
| 16. Ứng dụng lý thuyết ma trận trong khoa học dữ liệu .....                                                                                 | 180 |
| <i>TS. Lê Bích Phượng</i>                                                                                                                   |     |
| 17. Nội suy Lagrange tại các lưới chính.....                                                                                                | 186 |
| <i>TS. Nguyễn Văn Minh</i>                                                                                                                  |     |
| 18. The impact of guest pager systems on smart key technologies in coffee shop<br>operations: a quantitative and analytical approach .....  | 193 |
| <i>ThS. Vu Thi Huong Sac</i>                                                                                                                |     |
| 19. Text enhanced dual transformer network for multimodal sentiment analysis<br>.....                                                       | 198 |
| <i>TS. Dao Quoc Phuong</i>                                                                                                                  |     |
| 20. How business–government engagements influence the investment<br>environment: evidence from foreign-invested enterprises in Vietnam..... | 212 |
| <i>TS. Vuong Thi Thao Binh</i>                                                                                                              |     |

## NGHIÊN CỨU TÍNH CHẤT CỦA GIÁ TRỊ RIÊNG LỚN THỨ HAI TRONG MA TRẬN LESLIE NGẪU NHIÊN

ThS. Lê Thị Hương Giang

Khoa Khoa học Cơ bản,

Trường Đại học Mở - Địa chất, 18 Phố Viên, Hà Nội  
Email: [huonggiangle87@gmail.com](mailto:huonggiangle87@gmail.com); Tel: 0987353030

### Tóm tắt

Ma trận Leslie là một mô hình toán học quan trọng trong nghiên cứu sinh học quần thể, cho phép mô tả sự biến đổi của quần thể theo cấu trúc tuổi thông qua tỉ lệ sinh sản và tỉ lệ sống sót của từng nhóm tuổi. Trong mô hình này, giá trị riêng lớn nhất quyết định tốc độ tăng trưởng dài hạn của quần thể, trong khi giá trị riêng lớn thứ hai có vai trò quan trọng trong việc đánh giá tốc độ hội tụ của quần thể về trạng thái ổn định. Bài báo nghiên cứu tính chất của giá trị riêng lớn thứ hai đối với một lớp ma trận Leslie ngẫu nhiên có cấu trúc sinh sản gần tuần hoàn. Trên cơ sở chuẩn hóa ma trận Leslie và phân tích phổ của ma trận thu được, bài báo trình bày phương pháp khoanh vùng giá trị riêng lớn thứ hai dựa trên các tham số đặc trưng của quá trình sinh sản, gồm số đợt sinh sản trong đời, chu kỳ sinh sản và độ dài của mỗi đợt sinh sản. Kết quả nghiên cứu góp phần cung cấp cơ sở toán học cho việc đánh giá mức độ ổn định của quần thể, đặc biệt trong các trường hợp dữ liệu sinh học chưa đầy đủ.

**Từ khóa:** ma trận Leslie; giá trị riêng lớn thứ hai; ma trận ngẫu nhiên; sinh sản gần tuần hoàn; sinh học quần thể.

### 1. Giới thiệu

Trong sinh học quần thể, việc dự báo xu hướng phát triển của một quần thể theo thời gian có ý nghĩa quan trọng đối với công tác bảo tồn, khai thác và quản lý tài nguyên sinh vật. Đối với những quần thể có cấu trúc tuổi rõ rệt, mô hình ma trận là một trong những công cụ toán học hiệu quả để mô tả quá trình biến đổi quy mô quần thể. Trong đó, ma trận Leslie do Leslie P.H. (1945) trang 183–212 đề xuất là mô hình kinh điển, biểu diễn sự phát triển của quần thể thông qua tỉ lệ sinh sản và tỉ lệ sống sót theo từng nhóm tuổi.

Sau các công trình ban đầu của Leslie, mô hình ma trận quần thể tiếp tục được mở rộng theo nhiều hướng khác nhau, chẳng hạn mô hình theo giai đoạn phát triển của Lefkovitch L. P. (1965), các mô hình nhân khẩu học toán học của Keyfitz, N. (1968) và các mô hình ma trận quần thể trong sinh thái học hiện đại của Caswell, H. (2001). Về mặt toán học, sự phát triển dài hạn của quần thể chịu chi phối mạnh bởi các giá trị riêng của ma trận chiếu quần thể. Giá trị riêng lớn nhất, hay giá trị riêng Perron, phản ánh tốc độ tăng trưởng; trong khi các giá trị riêng còn lại quyết định đặc điểm dao động và tốc độ hội tụ về phân bố tuổi ổn định theo Caswell, H. (2001).

Trong nhiều mô hình quần thể, giá trị riêng lớn thứ hai có ý nghĩa đặc biệt quan trọng. Nếu mô-đun của giá trị riêng này gần với giá trị riêng lớn nhất, quần thể có thể dao động trong thời gian dài trước khi đạt trạng thái ổn định. Ngược lại, nếu

giá trị này nhỏ, các dao động chuyển tiếp suy giảm nhanh và quần thể sớm đạt tới phân bố tuổi ổn định.

Tuy nhiên, trong thực tế, các tham số sinh học như tỉ lệ sinh sản và tỉ lệ sống sót thường không cố định. Chúng có thể thay đổi theo năm, theo mùa, theo chu kỳ sinh học hoặc chịu ảnh hưởng của điều kiện môi trường. Vì vậy, việc xác định chính xác các giá trị riêng của ma trận Leslie, đặc biệt là giá trị riêng lớn thứ hai, thường gặp nhiều khó khăn.

Một hướng tiếp cận đáng chú ý là nghiên cứu các ma trận Leslie có kiểu sinh sản gần tuần hoàn. Kirkland, S. (1993) đã chỉ ra rằng khi tỉ lệ sinh sản tập trung gần các bội số của một chu kỳ nhất định, phổ của ma trận Leslie có những đặc điểm riêng biệt, trong đó xuất hiện các giá trị riêng phức có mô-đun gần với bán kính phổ. Các kết quả này tiếp tục được Chen, M. Q., & Li, X. (2005) phát triển đối với ma trận Leslie dạng hàng ngẫu nhiên và có cấu trúc sinh sản gần tuần hoàn. Bên cạnh đó, các mô hình Leslie ngẫu nhiên cũng được Cáceres, M. O., & Cáceres-Saez, I. (2011) nghiên cứu nhằm mô tả tốt hơn sự biến động của các tham số sống còn trong môi trường không ổn định.

Trên cơ sở đó, bài báo này tập trung nghiên cứu tính chất của giá trị riêng lớn thứ hai trong một lớp ma trận Leslie ngẫu nhiên có kiểu sinh sản gần tuần hoàn. Mục tiêu chính là trình bày phương pháp khoanh vùng giá trị riêng lớn thứ hai chỉ dựa trên các tham số đặc trưng của quá trình sinh sản, thay vì phải biết chính xác toàn bộ tỉ lệ sinh sản ở từng nhóm tuổi.

## 2. Cơ sở lý thuyết

### 2.1. Ma trận Leslie

Giả sử một quần thể được chia thành  $n$  nhóm tuổi khác nhau. Ma trận Leslie là ma trận vuông cấp  $n$ , có dạng:

$$L = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

,trong đó,  $f_j \geq 0$  là tỉ lệ sinh sản của nhóm tuổi thứ  $j$ ,  $s_j > 0$  là tỉ lệ sống sót từ nhóm tuổi  $j$  sang nhóm tuổi  $j + 1$ . Điều kiện tồn tại ít nhất một  $f_j > 0$  bảo đảm quần thể có khả năng sinh sản. Gọi  $x_0$  là véc tơ quần thể ban đầu. Khi đó, véc tơ quần thể tại thời điểm  $t$  được xác định bởi:

$$x_t = L^t x_0.$$

Tỉ lệ phân bố tuổi tại thời điểm  $t$  được biểu diễn thông qua véc tơ chuẩn hóa:

$$\frac{x_t}{\|x_t\|_1}.$$

Theo lý thuyết Perron-Frobenius đối với ma trận không âm của Caswell, H. (2001), nếu ma trận Leslie thỏa mãn các điều kiện thích hợp về tính bất khả quy và nguyên thủy, thì giá trị riêng lớn nhất của ma trận quyết định xu hướng tăng trưởng dài hạn của quần thể.

## 2.2. Chuẩn hóa ma trận Leslie

Gọi  $\rho$  là bán kính phổ của ma trận  $L$ , tức  $\rho = |\lambda_1|$ . Để thuận tiện cho việc phân tích phổ, ta thực hiện phép biến đổi đồng dạng thông qua ma trận đường chéo:

$$S = \text{diag}\{v_1, v_2, \dots, v_n\},$$

trong đó:

$$v_1 = 1, v_j = \frac{\prod_{i=1}^{j-1} s_i}{\rho^{j-1}}, j = 2, \dots, n.$$

Sau phép biến đổi, thu được ma trận chuẩn hóa  $A$ . Hàng đầu tiên của ma trận  $A$  có các phần tử:

$$a_j = \frac{f_j s_1 s_2 \cdots s_{j-1}}{\rho^j}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Khi đó:

$$\sum_{j=1}^n a_j = 1.$$

Do đó, ma trận  $A$  là một ma trận Leslie đã được chuẩn hóa, trong đó giá trị riêng lớn nhất  $\lambda_1 = 1$ . Các giá trị riêng còn lại thỏa mãn  $|\lambda_j| < 1, j \geq 2$ . Việc chuẩn hóa này giúp phân tích rõ hơn vai trò của các giá trị riêng dưới trội, đặc biệt là giá trị riêng lớn thứ hai, đối với tốc độ hội tụ của quần thể.

## 2.3. Ma trận Leslie ngẫu nhiên có kiểu sinh sản gần tuần hoàn

Trong tự nhiên, nhiều loài sinh vật không sinh sản đều đặn ở mọi lứa tuổi mà thường sinh sản tập trung vào một số giai đoạn nhất định trong vòng đời. Ví dụ, một loài có thể sinh sản mạnh theo chu kỳ nhiều năm, mỗi chu kỳ chỉ có một khoảng thời gian sinh sản ngắn. Đặc điểm này có thể được mô tả bằng khái niệm sinh sản gần tuần hoàn.

Một ma trận Leslie ngẫu nhiên  $A$  được gọi là có kiểu sinh sản gần tuần hoàn loại  $(k, d, s)$ , trong đó  $k$  là số đợt sinh sản trong đời,  $d$  là chu kỳ sinh sản và  $s$  là độ dài của mỗi đợt sinh sản, nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

$$a_q > 0, q \in \{jd, jd - 1, \dots, jd - s\}, j = 1, 2, \dots, k.$$

Điều này có nghĩa là các hệ số sinh sản dương chỉ tập trung quanh các vị trí gần bội số của chu kỳ  $d$ . Ngoài ra, các tham số thỏa mãn:

$$1 \leq s < \frac{d}{2k+1}, k \geq 1.$$

Điều kiện này phản ánh giả thiết rằng độ dài mùa sinh sản tương đối ngắn so với toàn bộ chu kỳ sinh sản. Cách mô tả này phù hợp với hướng nghiên cứu của Kirkland, S. (1993). Về ma trận Leslie có kiểu sinh sản gần tuần hoàn, đồng thời là cơ sở cho Chen, M. Q., & Li, X. (2005) đưa ra các mở rộng về phổ của ma trận Leslie dạng hàng ngẫu nhiên.

**Ví dụ.** Ma trận  $A$  có hàng đầu là  $\left[ \underbrace{0 \dots 0}_{8 \text{ số } 0} \frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{1}{4} \right]$  là ma trận loại  $(1, 11, 2)$ .

- $k = 1$ : Loài này chỉ có đúng 1 đợt sinh sản trong đời.
- $d = 11$ : Chu kỳ sinh sản lặp lại sau 11 năm.
- $s = 2$ : Độ dài của đợt sinh sản là 2 năm.

**Ví dụ.** Ma trận có hàng đầu là  $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$  là loại (2,10,1).

- $k = 2$ : Loài này có 2 đợt sinh sản trong đời.
- $d = 10$ : Chu kỳ sinh sản lặp lại sau 10 năm.
- $s = 1$ : Độ dài của đợt sinh sản là 1 năm.

### 3. Kết quả

#### 3.1. Tính chất của giá trị riêng lớn thứ hai

Giả sử  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  là tập các véc tơ riêng độc lập tuyến tính tương ứng với các giá trị riêng  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Khi đó, véc tơ quần thể ban đầu có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$x_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = \sum_{j=1}^n c_j u_j.$$

Sau  $t$  bước thời gian:

$$x_t = c_1 u_1 + \sum_{j=2}^n \lambda_j^t c_j u_j.$$

Do  $|\lambda_j| < 1$  với  $j \geq 2$ , nên khi  $t$  đủ lớn, các thành phần ứng với những giá trị riêng có mô-đun nhỏ sẽ suy giảm dần. Khi đó, dao động chuyển tiếp của quần thể chủ yếu chịu ảnh hưởng bởi giá trị riêng lớn thứ hai.

Trong nhiều trường hợp, giá trị riêng lớn thứ hai là một cặp giá trị riêng phức liên hợp:

$$\lambda_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = r_2 e^{-i\theta_2}.$$

Ở đây,  $r_2 = |\lambda_2|$  là mô-đun và  $\theta_2$  là góc argument của  $\lambda_2$ . Chu kỳ dao động của quần thể có thể xấp xỉ bởi:

$$\theta_2 \approx \frac{2\pi}{T},$$

trong đó  $T$  là chu kỳ dao động.

Xét sự biến thiên của véc tơ quần thể sau khoảng thời gian  $T$ , ta có hiệu số

$$\Delta x_p = x_{(p+1)T} - x_{pT} = \sum_{j=2}^n \lambda_j^{pT} (\lambda_j^T - 1) c_j u_j$$

Khi thời gian quan sát đủ lớn ( $p \rightarrow +\infty$ ), tỉ số  $\left(\frac{r_j}{r_2}\right)^{pT} \rightarrow 0$  ( $j \geq 4$ ) nên các giá trị riêng  $\lambda_j$  ( $j \geq 4$ ) nhỏ sẽ bị triệt tiêu. Do  $T = \frac{2\pi}{\theta_2}$  nên  $e^{i\theta_2 T} \approx 1$  thì với một số nguyên  $p$  đủ lớn:

$$\Delta x_p \approx r_2^{pT} (r_2^T - 1) (c_2 u_2 + c_3 u_3)$$

Nên,  $x_{(p+2)T} - x_{(p+1)T} \approx r_2^T (x_{(p+1)T} - x_{pT})$ . Công thức này cho ta thấy biến động của quần thể thực chất chỉ bị chi phối bởi hệ số  $r_2$ , còn  $\theta_2$  liên quan đến chu kỳ dao động của quần thể. Nếu  $r_2$  gần 1, dao động sẽ suy giảm chậm và quần thể cần thời gian dài để đạt trạng thái ổn định. Nếu  $r_2$  nhỏ hơn đáng kể so với 1, quần thể ổn định nhanh hơn. Đây cũng là nhận định phù hợp với lý thuyết phổ của ma trận không âm và mô hình ma trận quần thể của Caswell, H. (2001).

### 3.2 Phương pháp khoanh vùng giá trị riêng lớn thứ hai

Giờ ta tiến hành khoanh vùng giá trị riêng  $\lambda_2$ . Với bất kỳ  $k, d, s$ , ta định nghĩa:

$$l := l_{k,d,s} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{d-s}{2ks} \right\rfloor & \text{nếu } 2ks \text{ là ước của } (d-s) \\ \frac{d-s}{2ks} - 1 & \text{nếu } 2ks \text{ không là ước của } (d-s) \end{cases}$$

Điều này có nghĩa là  $l$  là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn  $\frac{d-s}{2k}$ . Lưu ý rằng với định nghĩa này, ta có:

$$1 \leq l \text{ và } \frac{2\pi l}{d-s} < \frac{\pi}{ks}$$

Định lý dưới đây là phần quan trọng nhất của bài báo, đưa ra cách khoanh vùng  $\lambda_2$  chỉ dựa trên các tham số  $k, d, s$  mà không cần biết chính xác tỉ lệ sinh sản  $a_j$ .

**Định lý.** Với mỗi  $m \in \{1, 2, \dots, l\}$ , ma trận  $A$  có đúng một giá trị riêng  $re^{i\theta}$  thỏa mãn 2 điều kiện:

- Về góc quay:  $\theta \in \left[ \frac{2\pi}{d}; \frac{2\pi}{d-s} \right]$
- Về độ lớn:  $\hat{r}_m(\theta) \leq r \leq 1$ , trong

đó  $\hat{r}_m(\theta)$  là nghiệm dương của phương trình:

$$\hat{r}_m^{kd} \sin((d-s)\theta) - \hat{r}_m^{d-s} \sin(kd\theta) + \sin([(k-1)d+s]\theta) = 0, \hat{r}_m > 0$$

Rõ ràng,  $\hat{r}_m(\theta)$  chỉ phụ thuộc vào  $d, s, k$  và  $m$  mà không phụ thuộc vào giá trị thực tế của các phần tử khác 0 trên hàng đầu  $a_j$  của ma trận  $A$ . Do đó, nếu ta xác định được giá trị cực tiểu  $\bar{r} = \min \hat{r}_m(\theta)$  thì sẽ xác định được ngưỡng ổn định thấp nhất của quần thể. Và nếu  $\bar{r} \approx 1$  thì quần thể chắc chắn sẽ rất lâu có thể tiến tới trạng thái cân bằng.

**Ví dụ.** Xét ba ma trận Leslie ngẫu nhiên  $A_1, A_2, A_3$  cùng thuộc loại (1,11,2). Điều này có nghĩa là các quần thể tương ứng đều có một đợt sinh sản trong đời, chu kỳ sinh sản là 11 năm và độ dài mỗi đợt sinh sản là 2 năm.

Hàng đầu tiên của ba ma trận lần lượt là:

$$\begin{aligned} A_1 &: \left[ 0, \dots, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right], \\ A_2 &: \left[ 0, \dots, 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{7}{8} \right], \\ A_3 &: \left[ 0, \dots, 0, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16} \right]. \end{aligned}$$

Ba ma trận này có cùng cấu trúc sinh sản gần tuần hoàn nhưng khác nhau về phân bố tỉ lệ sinh sản trong mùa sinh sản. Tác giả tính toán trên cơ sở mô hình đã chuẩn hóa được trình bày trong Bảng 1.

Bảng 1. Kết quả tính toán giá trị riêng lớn thứ hai

| $A$   | $\lambda_2$         | $T$ | $\left  \theta_2 - \frac{2\pi}{t} \right $ | $R$                     | $\ x_M - x_{M-1}\ _\infty$ |
|-------|---------------------|-----|--------------------------------------------|-------------------------|----------------------------|
| $A_1$ | $0,9865e^{0,6277i}$ | 10  | 0,0006                                     | $0,6214 \times 10^{-7}$ | $0,4361 \times 10^{-4}$    |
| $A_2$ | $0,9959e^{0,5799i}$ | 11  | 0,0087                                     | $0,1242 \times 10^{-3}$ | $0,7170 \times 10^{-2}$    |
| $A_3$ | $0,9933e^{0,6861i}$ | 9   | 0,0079                                     | $0,8487 \times 10^{-4}$ | $0,4330 \times 10^{-2}$    |

Từ kết quả trên có thể thấy,  $A_1$  có chu kỳ dao động xấp xỉ 10,  $A_2$  có chu kỳ dao động xấp xỉ 11 và  $A_3$  có chu kỳ dao động xấp xỉ 9. Trong ba trường hợp,  $A_1$  có mô-đun  $r_2$  cách xa 1 nhất, do đó quần thể tương ứng có xu hướng ổn định nhanh hơn. Ngược lại,  $A_2$  có  $r_2$  rất gần 1, cho thấy quần thể có thể dao động trong thời gian dài trước khi tiến tới trạng thái cân bằng. Kết quả này phù hợp với nhận định lý thuyết rằng giá trị riêng lớn thứ hai quyết định tốc độ suy giảm của dao động chuyển tiếp trong mô hình ma trận quần thể theo Caswell, H. (2001).

#### **4. Thảo luận**

Kết quả nghiên cứu cho thấy cấu trúc sinh sản gần tuần hoàn có ảnh hưởng rõ rệt đến phổ của ma trận Leslie. Khi các hệ số sinh sản tập trung trong những khoảng thời gian ngắn và lặp lại theo chu kỳ, các giá trị riêng phức dưới trục thực có thể xuất hiện với mô-đun gần 1. Điều này làm cho quần thể dao động lâu hơn trước khi đạt trạng thái ổn định.

Ưu điểm của phương pháp được trình bày trong bài báo là không đòi hỏi phải biết chính xác toàn bộ tỉ lệ sinh sản theo từng nhóm tuổi. Thay vào đó, chỉ cần biết ba tham số tổng quát của quá trình sinh sản, gồm  $k$ ,  $d$ ,  $s$ . Đây là hướng tiếp cận có ý nghĩa trong các nghiên cứu sinh học thực nghiệm, nơi dữ liệu chi tiết thường khó thu thập hoặc có độ bất định cao.

Mặt khác, việc sử dụng ma trận Leslie ngẫu nhiên giúp mô hình phản ánh tốt hơn đặc điểm biến động của các tham số sinh học trong môi trường tự nhiên. Các nghiên cứu về động lực quần thể trong môi trường biến đổi đã chỉ ra rằng sự ngẫu nhiên của các tham số sống còn có thể ảnh hưởng đáng kể đến tốc độ tăng trưởng dài hạn và đặc điểm ổn định của quần thể theo Cáceres, M. O., & Cáceres-Saez, I. (2011).

Tuy nhiên, nghiên cứu này vẫn còn một số điểm cần tiếp tục phát triển. Thứ nhất, cần mở rộng phân tích cho các trường hợp ma trận có kích thước lớn hơn và nhiều đợt sinh sản hơn trong vòng đời. Thứ hai, cần xây dựng thêm các ví dụ số và mô phỏng với dữ liệu thực nghiệm để kiểm tra khả năng áp dụng của phương pháp. Thứ ba, cần xem xét thêm ảnh hưởng của sự biến động đồng thời giữa tỉ lệ sinh sản và tỉ lệ sống sót đến vị trí của giá trị riêng lớn thứ hai.

#### **5. Kết luận**

Bài báo đã nghiên cứu tính chất của giá trị riêng lớn thứ hai trong một lớp ma trận Leslie ngẫu nhiên có kiểu sinh sản gần tuần hoàn. Thông qua việc chuẩn hóa ma trận Leslie và phân tích các giá trị riêng của ma trận thu được, bài báo đã làm rõ vai trò của giá trị riêng lớn thứ hai đối với tốc độ hội tụ của quần thể về trạng thái ổn định.

Kết quả chính của nghiên cứu là trình bày phương pháp khoanh vùng giá trị riêng lớn thứ hai dựa trên các tham số  $k$ ,  $d$ ,  $s$ , tương ứng với số đợt sinh sản trong đời, chu kỳ sinh sản và độ dài của mỗi đợt sinh sản. Phương pháp này có ưu điểm là không phụ thuộc trực tiếp vào giá trị cụ thể của các hệ số sinh sản khác 0, do đó có thể áp dụng trong các trường hợp dữ liệu sinh học còn hạn chế.

Các ví dụ tính toán cho thấy khi mô-đun của giá trị riêng lớn thứ hai càng gần 1, quần thể càng cần nhiều thời gian để đạt tới trạng thái cân bằng. Ngược lại, khi

mô-đun này nhỏ hơn, các dao động chuyển tiếp suy giảm nhanh hơn và quần thể ổn định sớm hơn.

Kết quả nghiên cứu góp phần bổ sung cơ sở toán học cho việc phân tích động lực quần thể có cấu trúc tuổi, đồng thời có thể hỗ trợ công tác dự báo, bảo tồn và quản lý tài nguyên sinh vật trong điều kiện dữ liệu thực nghiệm chưa đầy đủ.

17

Caswell, H. (2001). *Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation* (2nd ed.). Sunderland, MA: Sinauer Associates.

Cáceres, M. O., & Cáceres-Saez, I. (2011). *Random Leslie matrices in population dynamics*. **Journal of Mathematical Biology**, **63**, 519–556.

Chen, M. Q., & Li, X. (2005). *Spectral properties of a near-periodic row-stochastic Leslie matrix*. **Linear Algebra and its Applications**, **404**, 166–186.

Keyfitz, N. (1968). *Introduction to the Mathematics of Population*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Kirkland, S. (1993). *On the spectrum of a Leslie matrix with a near-periodic fecundity pattern*. **Linear Algebra and its Applications**, **178**, 261–279.

Leslie, P. H. (1945). *On the use of matrices in certain population mathematics*. **Biometrika**, **33**(3), 183–212.

Lefkovich, L. P. (1965). *The study of population growth in organisms grouped by stages*. **Biometrics**, **21**, 1–18.