TỔNG BIÊN TẬP
HÀ DUY KHÁNH

PHÓ TỔNG BIÊN TẬP
ĐẶNG VĂN LONG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP
TS. **ĐỖ HỮU HÀO** (Chủ tịch)
GS,TSKH. **BÀNH TIẾN LONG** (P. Chủ tịch)
TSKH. **PHAN XUÂN DŨNG**
PGS,TS. **HÀ MINH HÙNG**
PGS,TS. **TRƯƠNG VIỆT ANH**
GS,TS. **ĐINH VĂN CHIẾN**
GS,TSKH. **PHẠM VĂN LANG**
GS,TS. **CHU VĂN ĐẠT**
PGS,TS. **TRẦN VĨNH HƯNG**
PGS,TS. **ĐÀO QUANG KẾ**
PGS,TS. **NGUYỄN VĂN BÀY**
PGS,TS. **ĐÀO DUY TRUNG**
PGS,TS. **LÊ THU QUÝ**
PGS,TS. **BÙI TRUNG THÀNH**
PGS,TS. **LÊ VĂN ĐIỂM**
GS,TS. **LÊ ANH TUẤN**
GS,TS. **NGUYỄN HỮU LỘC**
PGS,TS. **DƯƠNG VĂN TÀI**
TS. **PHAN ĐĂNG PHONG**
TS. **TẠ NGỌC HẢI**
PGS,TS. **TRẦN NGỌC HIỀN**
PGS,TS. **TRƯƠNG HOÀNH SƠN**
TS. **HỒ TRẦN ANH NGỌC**
TS. **NGÔ TRỌNG BÍNH**
PhD. **MIKE PHÙNG**

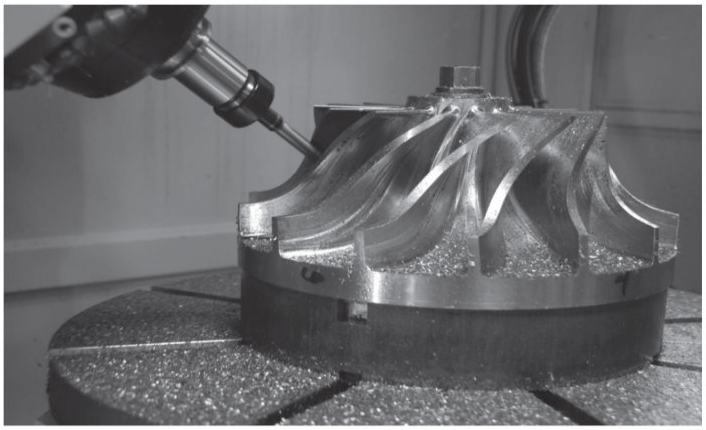
THIẾT KẾ MỸ THUẬT
NGÂN GIANG

*Tạp chí Cơ khí Việt Nam:
- In tại Công ty Cổ phần In Khoa học Công nghệ Hà Nội
- Khuôn khổ 20,5cm x 28,5cm
- 396 trang
- Xuất bản mỗi tháng một kỳ
- Giá bán 120.000 đồng/quyển Tạp chí

TẠP CHÍ
ISSN 2615 - 9910 (bản in)
ISSN 2815 - 5505 (online)

CƠ KHÍ VIỆT NAM

VIETNAM MECHANICAL ENGINEERING JOURNAL
CƠ QUAN CỦA TỔNG HỘI CƠ KHÍ VIỆT NAM • http://cokhivietnam.vn



- Thiết kế khuôn phun ép cho mẫu composite có dùng carbon fiber dạng tấm
- Nghiên cứu tính toán hiệu suất của loa giảm giật trên súng đại liên SĐL-M24
- Phân tích ứng dụng hệ thống truyền động khí nén trong lĩnh lực cơ điện tử

Số 331, tháng 8 năm 2025
Tạp chí Cơ khí Việt Nam phát hành ngày 25 tháng 8 năm 2025

TÒA SOẠN TẠP CHÍ CƠ KHÍ VIỆT NAM
Số 4 Phạm Văn Đồng (trong Viện Nghiên cứu Cơ khí), P. Phú Diễn, TP. Hà Nội
Điện thoại: (024) 3792 0650 **Hotline:** 0985 696 263 - 0982 254 465
Email: tcckvietnam@gmail.com
Website: cokhivietnam.vn

* * *

Giấy phép hoạt động Tạp chí in và Tạp chí Điện tử của Bộ Thông tin và Truyền thông
Số 378/GP-BTTTT, ngày 22 tháng 6 năm 2021

Văn bản chấp thuận tăng trang số 1297/BC-QLBC ngày 13 tháng 8 năm 2025 của Cục Báo chí, Bộ Văn hóa, Thể thao và Du lịch đề xuất bản số 331 tháng 8 năm 2025

Văn phòng đại diện:

1. Tại TP. Hồ Chí Minh:
- PGS,TS. **Bùi Trung Thành**
Phòng T4.0, Nhà T, Trường Đại học Công nghiệp TP. Hồ Chí Minh
Số 12 Nguyễn Văn Bảo, phường Hạnh Thông, TP. Hồ Chí Minh
Điện thoại: 0913 921 407
Email: tcck.tphcm@gmail.com

- GS,TS. **Nguyễn Hữu Lộc**
Phòng 205, Nhà B11, Trường Đại học Bách khoa, Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, số 268 Lý Thường Kiệt, phường Diên Hồng, TP. Hồ Chí Minh.
Điện thoại: 0913 603 264
Email: nhloc@hcmut.edu.vn

2. Tại tỉnh Quảng Ninh:
- TS. **Hoàng Minh Thuận**
Trường Cao đẳng Công nghiệp và Xây dựng, Số 54, khu Liên Phương, phường Yên Tử, tỉnh Quảng Ninh
Điện thoại: 0904 116 189
Email: minhthuan.tcckvn@gmail.com

3. Tại Thái Nguyên:
- GS,TS. **Vũ Ngọc Pi**
Số 234 tổ Phú Xá 5, phường Tích Lương, tỉnh Thái Nguyên
Điện thoại: 0974 905 578
Email: vungocpi@tnut.edu.vn

Phóng viên thường trú:

1. Tại Hải Phòng:
- **Lê Thế Hiệp**
Điện thoại: 0913 063 747
Email: daidientcck@gmail.com

MỤC LỤC
TẠP CHÍ CƠ KHÍ VIỆT NAM SỐ 331, THÁNG 8 NĂM 2025

Trang

NGHIÊN CỨU – TRAO ĐỔI (8 – 389)

1. TS. **Trương Công Tiễn**, TS. **Lê Văn An**: Đánh giá độ bền uốn của ống composite bằng lý thuyết phá hủy Tsai-Wu và phương pháp phần tử hữu hạn 3D..... 8

2. TS. **Lê Văn An**, TS. **Trương Công Tiễn**: Mô hình hóa hư hỏng theo tiêu chuẩn Hashin của vật liệu tấm hybrid metal/CFRP/metal chịu tải uốn 3 điểm trong môi trường phần tử hữu hạn..... 14

3. ThS. **Dương Lê Hùng**, ThS. **Bùi Chấn Thạnh**: Tối ưu hóa hướng sợi bằng phương pháp số nhằm nâng cao độ bền uốn của tấm hybrid kim loại/CFRP/kim loại..... 21

4. ThS. **Bùi Chấn Thạnh**, ThS. **Dương Lê Hùng**: Nghiên cứu số trạng thái uốn 4 điểm tấm hybrid (GB/T700)/CFRP/(GB/T700) sử dụng tiêu chí phá hủy Hashin..... 28

5. **Nguyễn Minh Trí**: Ứng dụng bộ điều khiển PID cải tiến kết hợp học lặp cho hệ truyền động quay cơ điện thủy lực..... 35

6. **Nguyễn Trương Trường Giang, Nguyễn Ngọc Phương, Trần Thanh Thưởng, Trần Thanh Lam**: Thực nghiệm độ bền kéo của mẫu kim loại ép nhiệt..... 41

7. **Bùi Thanh Chí Khang, Hồ Ngọc Bốn, Nguyễn Ngọc Phương, Đỗ Văn Đại**: Nghiên cứu thiết kế mô hình 3D hàn ống tự động..... 49

8. **Bùi Minh Luân, Nguyễn Văn Tú, Huỳnh Đỗ Song Toàn, Vũ Quang Huy**: Thiết kế máy uốn ống..... 58

9. **Hoàng Trung Kiên, Dương Đăng Danh, Đỗ Văn Hiến, Đỗ Văn Đại**: Thiết kế cơ cấu xoay ống cho quá trình tạo ống..... 65

10. **Trần Công Hiếu, Nguyễn Hải Hoàn, Đỗ Văn Hiến, Nguyễn Quang Sáng**: Thiết kế module đẩy ống cho máy uốn..... 73

11. **Phan Hữu Hoàng Ninh, Nguyễn Trọng Hiếu, Trần Quốc Hùng, Nguyễn Trà Kim Quyên**: Thiết kế mô hình tạo hình mặt cong bằng phương pháp chấn..... 81

12. **Lê Đình Nguyên Huy, Phan Thanh Nhàn, Lê Thanh Tùng, Nguyễn Hà**: Nghiên cứu chế tạo các mẫu thử độ bền uốn dạng tấm bằng phương pháp in 3D kim loại không bù vật liệu 89

13. **Huỳnh Trần Minh Chiến, Âu Thị Kim Loan, Hoàng Trọng Nghĩa, Tạ Nguyễn Minh Đức**: Thiết kế và chế tạo mẫu thử độ bền kéo của kết cấu dạng lattice..... 98

14. **Nguyễn Gia Hưng, Âu Thị Kim Loan, Hoàng Trọng Nghĩa, Tạ Nguyễn Minh Đức**: Thử nghiệm độ bền chi tiết chịu biến dạng uốn với các kết cấu dạng lattice..... 107

15. **Hoàng Lê Mạnh Tiệp, Nguyễn Đức Tôn, Phạm Quân Anh, Nguyễn Hải Hoàn**: Ứng dụng ANSYS CFX trong phân tích phân bố nhiệt độ lòng khuôn âm..... 115

16. **Lê Nguyễn Liêm, Trần Ngọc Hào, Âu Thị Kim Loan, Trần Thanh Thưởng**: Mô phỏng phân bố nhiệt của lòng khuôn dương khi dùng hệ thống giải nhiệt dạng lớp (Cooling Layer)... 122

17. **Phạm Anh Tú, Võ Minh Tâm**: Thiết kế khuôn phun ép cho mẫu composite có dùng carbon fiber dạng tấm..... 129

18. **Bành Quốc Nguyên, Trương Phát Đạt**: Nghiên cứu tối ưu hóa sản phẩm phun ép nhựa có hỗ trợ nước bằng phần mềm Moldex3D..... 138

19. **Phạm Văn Tuân, Lê Thanh Bình, Lê Xuân Hùng, Trần Đức Việt, Mai Đình Sĩ, Đinh Hoàng Thụy, Trần Văn Nhị, Bùi Quang Toàn**: Nghiên cứu, thiết kế và chế tạo hệ thống giá súng máy 12,7 mm đa năng kiểu bệ quay..... 144

20. ThS. **Nguyễn Thị Thu Hường**: Tổng quan ứng dụng công nghệ nano trong dệt may..... 148

21. **Nguyễn Văn Cảnh, Ngô Quang Tú**: Điều khiển vận tốc in tự thích nghi theo hình học nhằm nâng cao độ chính xác bề mặt trong in 3D FDM..... 155
22. **Nguyễn Thanh Tùng**: Phân tích uốn tĩnh của tấm composite nhiều lớp trên nền đàn hồi 161
23. **Cao Hoàng Thông, Trần Thanh Thưởng, Nguyễn Hà, Huỳnh Quang Duy**: Ứng dụng ANSYS trong phân tích kết quả gia nhiệt bằng khí cho lòng khuôn phun ép nhựa..... 168
24. **Lê Thái Sơn, Nguyễn Hữu Ngoạn**: Thiết kế, chế tạo thiết bị gia công lỗ tâm, phục vụ gia công chi tiết dạng trục..... 178
25. **Hoàng Thị Kim Dung**: Nghiên cứu đặc tính khí động máy bay hai chỗ ngồi..... 182
26. **Phạm Trung Kiên, Nguyễn Minh Tiến**: Nghiên cứu, thiết kế và chế tạo giá thử nghiệm động cơ khởi động trên xe xích quân sự hạng trung..... 186
27. **Lê Thái Sơn, Lê Phú Cường**: Đánh giá chất lượng mối hàn khi hàn ma sát khuấy có hỗ trợ điện áp..... 191
28. **Vũ Ngọc Phúc, Bùi Như Nghĩa, Đặng Thái Việt**: Chiến lược dẫn đường rô bốt dạng bánh dựa trên giải thuật BIT* và phương pháp học tăng cường..... 196
29. ThS. **Nguyễn Thái Sơn**, PGS,TS. **Nguyễn Chí Sáng**, PGS,TS. **Trần Ngọc Hiền**: Nghiên cứu mô phỏng phân bố nhiệt trong công nghệ sản xuất bồi đắp..... 202
30. **Hoàng Xuân Lãm:** Ứng dụng trí tuệ nhân tạo (AI) trong dự đoán ảnh hưởng của lượng chạy dao và tốc độ trục chính đến độ nhám bề mặt khi gia công biên dạng 3D vật liệu nhôm 7075-T6 bằng dao phay cầu trên máy phay CNC..... 209
31. **Bùi Mạnh Cường, Dương Thế Tuấn Anh, Nguyễn Bích Ngọc, Vương Anh Tuấn, Phan Văn Trường, Thân Đình Thực, Đặng Minh Chiến, Đỗ Văn Sĩ**: So sánh khả năng chống mài mòn của lớp phủ plasma điện phân và lớp mạ crôm trên nền thép dựa trên thực nghiệm..... 215
32. **Nguyễn Văn Bình Dương, Phan Hoàng Long, Nguyễn Huy Hùng, Dương Văn Tú, Nguyễn Tấn Tiến**: Thiết kế cơ cấu truyền động vây dựa trên cơ cấu bốn khâu không gian.... 222
33. **Nguyễn Văn Bình Dương, Phan Hoàng Long, Nguyễn Huy Hùng, Dương Văn Tú, Nguyễn Tấn Tiến**: Thiết kế và phân tích động lực học cụm màng vây mềm cho robot bơi phỏng sinh học sử dụng chuyển động MPF..... 228
34. **Nguyễn Công Nguyên, Lê Thanh Sơn, Phan Hoàng Long, Ngô Nguyên Hồng, Nguyễn Tấn Tiến**: Thiết kế và chế tạo máy cuộn lục bình MCLB-2..... 235
35. **Phan Hoàng Long, Nguyễn Huy Hùng, Dương Văn Tú, Nguyễn Tấn Tiến**: Thiết kế robot bốc xếp kho đặc chủng dùng tay giãn dài và băng tải mô-đun..... 240
36. **Vũ Viết Toàn, Lê Thanh Sơn, Phan Hoàng Long, Nguyễn Tấn Tiến**: Nghiên cứu cải tiến thiết kế silo chứa nông sản ứng dụng công nghệ bảo quản lạnh..... 247
37. **Vũ Viết Toàn, Lê Thanh Sơn, Phan Hoàng Long, Nguyễn Tấn Tiến**: Nghiên cứu bảo quản lúa bằng phương pháp thông thoáng lạnh..... 253
38. **Hồ Lê Khánh Dy, Nguyễn Hữu Cường Thịnh, Phan Hoàng Long, Nguyễn Tấn Tiến:** Thiết kế bộ điều khiển PID và MRAC cho hệ thống waterjet trong USVs cứu hộ..... 259
39. KS. **Nguyễn Hoàng Phú**, ThS. **Mai Văn An**, ThS. **Tạ Bá Dũng**: Nghiên cứu tính toán hiệu suất của loa giảm giật trên súng đại liên SĐL-M24..... 265
40. **Phùng Tuấn Anh, Trần Văn Chiến, Nguyễn Trường An, Bùi Công Đoài**: Khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ tôi cận tới hạn và nhiệt độ ram đến cơ tính và tổ chức tế vi của thép hợp kim thấp 30CrMnSi chế tạo từ sắt xốp..... 270
41. ThS. **Bùi Ánh Hưng**: Khảo sát vật liệu có bề dày không đồng nhất để tính toán liều chiếu trong quá trình kiểm tra mối hàn..... 278
42. **Nguyễn Anh Tuấn, Nguyễn Quang Dũng, Nguyễn Văn Khiết**: Nghiên cứu thiết kế và chế tạo máy in 3D resin theo công nghệ LCD..... 283

43. TS. **Nguyễn Duy Anh**, ThS. **Nguyễn Thị Hiếu Thảo**: Nghiên cứu tối ưu kiến trúc mạng nơ ron với thuật toán toán di truyền NSGA-II, ứng dụng trong bài toán dự đoán độ nhám bề mặt sau khi tiện CNC với thép SUM24L..... 291
44. ThS. **Nguyễn Tiến Dũng**: Ứng dụng thực nghiệm để đánh giá khuyết tật mối hàn thân, vỏ tàu thuỷ bằng phương pháp siêu âm..... 299
45. **Nguyễn Như Hiếu, Phạm Ngọc Chung**: Đồng bộ hóa đồng nhất của hệ siêu hỗn loạn bốn chiều sử dụng cách tiếp cận hàm năng lượng Hamiltonian..... 304
46. **Phạm Ngọc Chung, Nguyễn Như Hiếu**: Một tiêu chuẩn sai số bậc cao tìm nghiệm xấp xỉ cho tần số dao động tự do của hệ phi tuyến có chứa đạo hàm cấp ba..... 311
47. ThS. **Hà Trung Tự**: Nghiên cứu ảnh hưởng của nhiệt độ đến độ bền vỏ động cơ phóng tên lửa A87..... 318
48. TS. **Nguyễn Minh Thắng**: Nghiên cứu và mô phỏng kiểm tra độ bền ô tô trong trường hợp va chạm xiên bằng phương pháp phần tử hữu hạn..... 322
49. **Trần Văn Mạnh**: Phân tích giải pháp tối ưu hóa công suất của bộ thu hồi năng lượng piezoelectric xếp lớp tích hợp trên hệ thống treo ô tô..... 329
50. **Nguyễn Tiến Dũng**: Phân tích ứng dụng hệ thống truyền động khí nén trong lĩnh lực cơ điện tử..... 334
51. **Trần Văn Mạnh**: Tiềm năng sử dụng nano graphene cải thiện hiệu quả làm việc trong dây chuyền tự động hóa sản xuất ô tô..... 338
52. **Trần Quang Phước**: Nghiên cứu phát hiện lỗi cho sản phẩm thân nhựa cầu lông dựa trên kỹ thuật Unwarpping..... 344
53. TS. **Bùi Văn Phương**, TS. **Mai Văn Tú**, TS. **Phạm Quang Hiếu**, NCS. **Bùi Anh Thức**: Nghiên cứu, thiết kế, chế thử liều phóng động cơ hành trình nhiên liệu rắn cho tên lửa chống tăng 352
54. **Thái Hoàng Tuyết Nhi, Nguyễn Văn Thành, Dương Công Châu**: Ứng dụng mô hình quyết định đa tiêu chí trong lựa chọn công nghệ tái chế chất thải điện tử..... 358
55. **Nguyễn Viết Tịnh, Nguyễn Văn Thành, Nguyễn Văn Thuận**: Ứng dụng phương pháp CRITIC và TOPSIS trong việc lựa chọn thủy điện xây dựng nhà máy năng lượng mặt trời nổi 365
56. **Trương Minh Hiếu, Trần Nguyên Duy Phương, Trương Quốc Thanh, Nguyễn Văn Thành, Võ Ngọc Cường**: Thiết kế thiết bị hỗ trợ điều trị phục hồi chức năng chi dưới cho bệnh nhân sau đột quỵ não..... 372
57. **Tien Dung Nguyen, Ngoc Thai Huynh, Hoang Trong Tran Huy**: Hydrodynamic and aerodynamic analysis of offshore wind turbine foundation model using finite element method 377
58. **Pham Ngoc Thanh, Phung Xuan Son**: Vibroacoustic behavior of a clamped double-composite plate filled with an air cavity in thermal environment..... 383

DOANH NGHIỆP – DOANH NHÂN (390 – 392)

- LILAMA 10 tiếp tục khẳng định bản lĩnh và năng lực tại Dự án Thủy điện Hòa Bình mở rộng 390

MỘT TIÊU CHUẨN SAI SỐ BẬC CAO TÌM NGHIỆM XẤP XỈ CHO TẦN SỐ DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA HỆ PHI TUYẾN CÓ CHỨA ĐẠO HÀM CẤP BA

A HIGHER-ORDER ERROR CRITERION FOR FINDING APPROXIMATE SOLUTIONS OF FREE VIBRATION FREQUENCIES OF NONLINEAR SYSTEMS WITH THE THIRD-ORDER DERIVATIVE

Phạm Ngọc Chung[1,*], Nguyễn Như Hiếu[2]
[1]Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Mỏ - Địa chất
[2]Khoa Cơ khí - Cơ điện tử, Trường Kỹ thuật Phenikaa, Đại học Phenikaa
Email: phamngocchung@humg.edu.vn;*
hieu.nguyennhu@phenikaa-uni.edu.vn

TÓM TẮT

Hệ phi tuyến có chứa đạo hàm cấp cao thường tạo ra các động lực học phức tạp. Đối với hệ có chứa đạo hàm cấp ba, ứng xử của hệ sẽ liên quan đến sự thay đổi của gia tốc, hay còn gọi là gia tốc biến thiên (jerk), và dẫn đến trạng thái chuyển động mà ở đó người ta có thể cảm nhận được mức độ "êm ái" của chuyển động. Trong nghiên cứu này, các tác giả đề xuất sử dụng một tiêu chuẩn sai số bậc cao, cụ thể là tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình để tìm nghiệm xấp xỉ cho tần số dao động tự do của một hệ phi tuyến có chứa đạo hàm cấp ba. Tiêu chuẩn có thể coi như một dạng bậc cao so với tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình đã biết. Hệ được xét có thành phần phi tuyến là tích của chuyển vị, vận tốc và gia tốc. Kết quả thu được chỉ ra rằng tiêu chuẩn đề xuất cho sai số tương đối nhỏ và nhỏ hơn so với các kết quả tần số thu được từ một số công bố trước đây. Tiêu chuẩn này có thể áp dụng cho các hệ phi tuyến khác nhau.

Từ khóa: *Hệ phi tuyến; Đạo hàm cấp ba; Tiêu chuẩn sai số; Tần số xấp xỉ.*

ABSTRACT

Nonlinear systems containing higher-order derivatives often produce complex dynamics. In dynamical systems with the third-order derivative, their behaviors will involve the acceleration variation, also known as jerk, and lead to a state of motion where one can feel the "smoothness" of the motion. In this study, the authors propose the use of a higher-order error criterion, namely the mean quartic error criterion, to find an approximate solution for the free vibration's frequency of a nonlinear system containing the third-order derivative. The proposed criterion can be considered as a higher-order form of the well-known mean squared error criterion. The system under consideration has a nonlinear component that is the product of displacement, velocity, and acceleration. The obtained results show that our approach gives relatively small errors and is smaller than the frequency results received from some previous publications. The used criterion can be applied to various nonlinear systems.

Keywords: *Nonlinear system; Jerk; Error criterion; Approximate frequency.*

1. GIỚI THIỆU

Đạo hàm cấp cao xuất hiện trong một hệ phi tuyến thường dẫn đến các đặc trưng phong phú về động lực học [1]. Đây là chủ đề được quan tâm nghiên cứu trong nhiều thập kỷ trở lại đây, trong đó có vấn đề hệ động lực chứa đạo hàm cấp ba [2]. Đạo hàm cấp ba là đạo hàm theo thời gian của thành phần gia tốc trong hệ động lực, tức liên quan đến tốc độ thay đổi của gia tốc, một đặc trưng mới so với các hệ động lực thông thường có chứa đạo hàm cấp hai. Theo các phát biểu thông thường, đạo hàm cấp một theo thời gian của chuyển dịch được gọi là vận tốc, đạo hàm cấp hai của chuyển dịch gọi là gia tốc; tuy nhiên đạo hàm cấp ba ít được biết đến hơn, sau đây ta gọi đạo hàm cấp ba của chuyển dịch là thành phần giật (jerk trong tiếng Anh). Yếu tố giật xuất hiện trong nhiều bài toán kỹ thuật và vật lý khác nhau [3, 4]. Phương trình chứa giật có thể dẫn đến các hiện tượng chuyển động khác nhau, có thể là chuyển động tuần hoàn [5], có thể là chuyển động hỗn độn [6], tùy thuộc vào các miền tham số khác nhau xuất hiện trong phương trình. Các mô tả chi tiết về giật mà ở đó chuyển động của hệ là hỗn độn, có thể kể đến như von Baeyer [7], Sprott và Linz [8]. Trong khuôn khổ của nghiên cứu này, ta quan tâm đến các chuyển động tuần hoàn có thể xuất hiện trong hệ có thành phần giật. Với các chuyển động tuần hoàn, việc tìm nghiệm giải tích là bài toán có ý nghĩa. Với hệ có giật, nhiều phương pháp đã được đề xuất để tìm nghiệm xấp xỉ của hệ trong một khuôn khổ nào đó mà độ chính xác của nghiệm là chấp nhận được. Cách tiếp cận cân bằng điều hòa cho hệ phi tuyến có chứa giật là một trong những ý tưởng đơn giản và tương đối dễ thực hiện, có thể tìm thấy trong nghiên cứu của Gottlieb [9]. Một cải tiến của phương pháp cân bằng điều hòa để tăng độ chính xác cho nghiệm là phương pháp cân bằng điều hòa dạng dư, trình bày bởi Leungn và Guo [10]. Nghiên cứu về nghiệm xấp xỉ của phương trình chứa giật được báo cáo bởi Karahan [11] sử dụng phương pháp nhiễu dạng đa thang (multiple scale), trong đó thành phần phi tuyến được xét trong các tình huống khác nhau (chẳng hạn: tích của chuyển vị, vận tốc và gia tốc; tích của vận tốc và bình phương gia tốc). Gần đây, El-Dib [12] đã phát triển một phương pháp, gọi là tuyến tính hóa tương đương để tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình vi phân phi tuyến bậc ba có chứa giật. Phương pháp của El-Dib tỏ ra hiệu quả với miền rộng các tham số và không cần xét đến nhiễu của nghiệm như các phương pháp nhiễu khác. Một phương pháp khác để tìm nghiệm xấp xỉ của hệ phi tuyến có chứa giật dựa vào một tiêu chuẩn sai số cụ thể nào đó. Cách tiếp cận này gần giống với phương pháp tuyến tuyến hóa tương đương; hệ được giả sử là có một nghiệm xấp xỉ nào đó với biểu diễn nghiệm chứa các tham số cần tìm, như trong nghiên cứu gần đây của Ismail và Abu-Zinadah [13]. Tuy nhiên, khi khảo sát với miền tham số lớn, nghiệm thu được của Ismail và Abu-Zinadah được xem là có sai số tăng dần. Trong nghiên cứu này, các tác giả mở rộng cách tiếp cận của Ismail và Abu-Zinadah, trong đó đề xuất sử dụng tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình, một tiêu chuẩn sai số bậc cao hơn so với sai số bậc hai đã biết. Do đó, nghiệm xấp xỉ tìm được đã được cải tiến về độ chính xác so với tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình trong cách tiếp cận của Ismail. Các khảo sát số được tiến hành nhằm minh họa cho tính hiệu quả của cách tiếp cận đề xuất.

2. TIÊU CHUẨN SAI SỐ BÌNH PHƯƠNG TRUNG BÌNH VÀ MŨ BỐN TRUNG BÌNH

Xét phương trình dạng tổng quát sau đây có chứa đạo hàm cấp ba [5]:

$$\dddot{x} + f\left(x, \dot{x}, \ddot{x}\right) = 0 \quad (1)$$

Trong đó, x = x(t) là đáp ứng chuyển dịch, $\dot{x}$ là đáp ứng vận tốc, $\ddot{x}$ là đáp ứng gia tốc, $\dddot{x}$ là đạo hàm của gia tốc, còn gọi là giật; $f\left(x, \dot{x}, \ddot{x}\right)$ là một hàm phi tuyến của ba đối số chuyển dịch, vận tốc và gia tốc. Nghiệm xấp xỉ của phương trình (1) được giả sử có dạng x = x_1(t,ω,P) là tuần hoàn với tần số ω, P là tập các tham số có trong biểu diễn nghiệm. Nếu x_1 có biểu diễn tuần hoàn theo dạng chuỗi Fourier thì P ký hiệu tập các tham số của chuỗi xấp xỉ. Thay nghiệm này vào (1), ta thu được sai số $e(t) = \dddot{x}_1 + f\left(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1\right)$. Tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình và mũ bốn trung bình cho phương trình (1) có dạng sau đây:

$$E_{2n}\left(\omega, P\right) = \int_0^T e^{2n}\left(t\right) dt \to \min_{\omega, P} \quad (2)$$

Trong đó, n = 1 cho tiêu chuẩn bình phương trung bình và n = 2 cho tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình; T là chu kỳ dao động của hệ, T = 2π/ω. Tiêu chuẩn (2) dẫn tới phương trình sau đây để xác định tần số ω và các tham số của nghiệm xấp xỉ:

$$\frac{\partial E_{2n}\left(\omega, P\right)}{\partial \omega} = 0, \ \frac{\partial E_{2n}\left(\omega, P\right)}{\partial P} = 0 \quad (3)$$

Trong phần tiếp theo, để minh họa tiêu chuẩn đề xuất (3) cho phương trình phi tuyến jerk, ta thực hiện tìm tần số cho một hệ phi tuyến mà ở đó thành phần phi tuyến là tích của chuyển dịch, vận tốc và gia tốc.

3. HỆ PHI TUYẾN JERK VỚI THÀNH PHẦN PHI TUYẾN LÀ TÍCH CỦA CHUYỂN DỊCH, VẬN TỐC VÀ GIA TỐC

Trong phần này, ta xét hệ phương trình vi phân phi tuyến sau đây [13]:

$$\dddot{x} + \dot{x} - \gamma x \dot{x} \ddot{x} = 0 \quad (4)$$

Trong đó, γ là một tham số phi tuyến gắn với thành phần là tích của chuyển dịch, vận tốc và gia tốc. Điều kiện đầu của phương trình (4) giả sử là:

$$x\left(0\right) = 0, \ \dot{x}\left(0\right) = A, \ \ddot{x}\left(0\right) = 0 \quad (5)$$

Trong đó, chuyển dịch và gia tốc ban đầu tại thời điểm t = 0 được giả sử bằng không, trong khi đó vận tốc ban đầu được giả sử khác không và có giá trị A cho trước. Giả sử nghiệm xấp xỉ bậc nhất của (4) có dạng sau đây thỏa mãn điều kiện đầu (5):

$$x_1\left(t\right) = x_1\left(t, \omega, A\right) = \frac{A}{\omega} \sin \omega t \quad (6)$$

Thay nghiệm (6) vào (2), ta thu được:

$$E_{2n}\left(\omega\right) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \gamma^k A^{2n+2k} \left(1 - \omega^2\right)^{2n-k} J_{kn}\left(\omega\right) \to \min_{\omega} \quad (7)$$

Trong đó, $C_{2n}^k = \left(2n\right)! / \left(k!\left(2n-k\right)!\right)$; $J_{kn}\left(\omega\right)$ được xác định như sau:

$$J_{kn}\left(\omega\right) = \int_0^T \sin^{2k} \omega t \cos^{2n} \omega t dt \quad (8)$$

Chú ý rằng trong biểu diễn nghiệm bậc nhất (6), chỉ có tham số tần số ω là chưa biết. Trong trường hợp xét xấp xỉ bậc cao hơn thì các tham số chưa biết tương ứng sẽ xuất hiện. Do đó, kết quả của (8) là chỉ cực tiểu hóa theo ω để thu được tần số cần tìm. Trong quá trình tính tích phân cho tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình và tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình, các biểu thức sau cho J_{kn}(ω) sẽ được sử dụng:

$$J_{01} = \pi / \omega, \ J_{11} = \pi / \left(4\omega\right), \ \ J_{21} = \pi / \left(8\omega\right)$$ ☞

$J_{02} = 3\pi / (4\omega)$, $J_{12} = \pi / (8\omega)$,
$J_{22} = 3\pi / (64\omega)$, $J_{32} = 3\pi / (128\omega)$,
$J_{42} = 7\pi / (512\omega)$.

3.1. Tần số thu được từ tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình

Trong trường hợp tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình (tức với n = 1), ta thu được biểu thức của E_2 là:

$$E_2 = E_2(\omega) = \frac{\pi A^2}{8\omega}\left[8 + 4\gamma A^2 + \gamma^2 A^4 - (16 + 4\gamma A^2)\omega^2 + 8\omega^4\right] \quad (9)$$

Đạo hàm của hàm $E_2(\omega)$ theo ω, ta thu được một phương trình trùng phương, giải ra ta được:

$$\omega = \sqrt{\frac{4 + \gamma A^2 + \sqrt{64 + 32\gamma A^2 + 7\gamma^2 A^4}}{12}} \quad (10)$$

3.2. Tần số thu được từ tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình

Trong trường hợp tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình (tức n = 2), biểu thức của E_4 có dạng sau đây:

$$E_4 = E_4(\omega) = \frac{\pi A^4}{\omega}\left(b_0 + b_1\omega^2 + b_2\omega^4 + b_3\omega^6 + b_4\omega^8\right) \quad (11)$$

Trong đó, các hệ số b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 cho bởi:

$$b_0 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\gamma A^2 + \frac{9}{32}\gamma^2 A^4 + \frac{3}{32}\gamma^3 A^6 + \frac{7}{512}\gamma^4 A^8,$$
$$b_1 = -3 - \frac{3}{2}\gamma A^2 - \frac{9}{16}\gamma^2 A^4 - \frac{3}{32}\gamma^3 A^6 \quad (12)$$
$$b_2 = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}\gamma A^2 + \frac{9}{32}\gamma^2 A^4,\ b_3 = -3 - \frac{1}{2}\gamma A^2,\ b_4 = \frac{3}{4}$$

Tiêu chuẩn (3) dẫn đến phương trình bậc bốn của bình phương tần số:

$$-b_0 + b_1\omega^2 + 3b_2\omega^4 + 5b_3\omega^6 + 7b_4\omega^8 = 0 \quad (13)$$

Trong đó, các hệ số b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 xác định từ (12). Việc giải một phương trình bậc bốn đầy đủ của ω^2 như phương trình (13) là có thể, tuy nhiên biểu thức giải tích của nó là tương đối phức tạp và không được trình bày ở đây; thay vào đó ta tìm nghiệm của (13) dưới dạng số. Ta viết nghiệm của phương trình (13) dưới dạng:

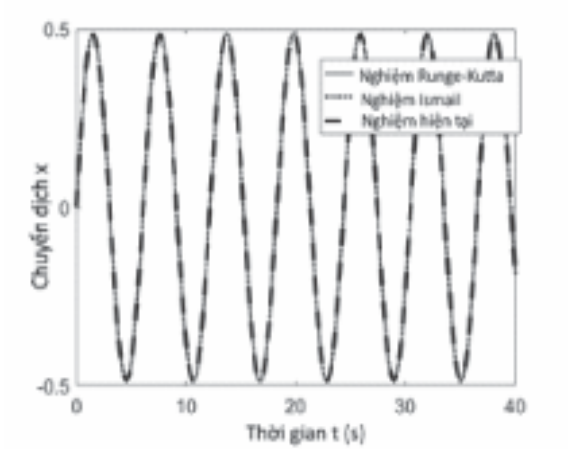
$$\omega = \omega(\gamma, A) \quad (14)$$

Trong đó, chú ý rằng các hệ số b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 phụ thuộc vào tích γA^2, vì thế ω cũng là hàm của tích γA^2. Trong phần sau, ta sẽ khảo sát nghiệm của (18) dưới dạng số theo tham số γA^2.

4. KẾT QUẢ SỐ VÀ THẢO LUẬN

Trong phần này, kết quả số cho phương trình (13) được trình bày. Như nhận định ở trên, ta thấy rằng trong các kết quả nghiệm giải tích (10), (14), tần số là một hàm của tích γA^2. Tại một giá trị lựa chọn trước của tích γA^2, ta có thể lựa chọn một tham số γ, vốn là tham số gắn với số hạng phi tuyến của hệ động lực, và lựa chọn một điều kiện ban đầu liên quan đến tham số A. Không giảm tính chất tổng quát, ta có thể giả sử γ = 1 và khảo sát đáp ứng của hệ thông qua tham số A. Trong Hình 1 là kết quả nghiệm diễn tiến theo thời gian của đáp ứng chuyển vị x với các phương pháp khác nhau gồm: phương pháp số Runge-Kutta bậc 4, nghiệm thu được từ tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình theo cách tiếp cận của Ismail đã thực hiện và nghiệm thu được từ tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình. Giá trị ban đầu A được lấy là A = 0.5. Thời gian mô phỏng được lấy là 40 (s). Có thể thấy rằng cả ba phương pháp đều cho kết quả tương đối trùng khít lên nhau. Kết quả số từ

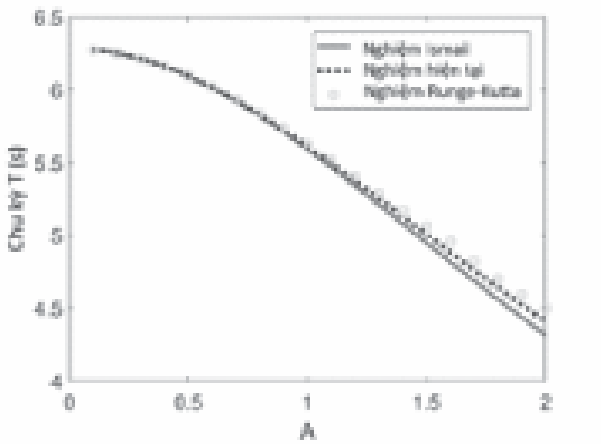
thuật toán Runge-Kutta là một trong những kết quả tham chiếu tin cậy do nó có độ chính xác cao khi giải quyết các hệ động lực phi tuyến; và do đó nó được lấy làm tham chiếu để đánh giá độ chính xác của các phương pháp giải tích xấp xỉ khác. Nghiệm thu được theo Ismail và nghiệm thu được từ tiêu chuẩn mũ bốn trung bình là tương đối chính xác trong tình huống tham số đã lựa chọn.



Hình 1. Đồ thị tiến triển theo thời gian của đáp ứng $x_1(t)$ với các phương pháp khác nhau

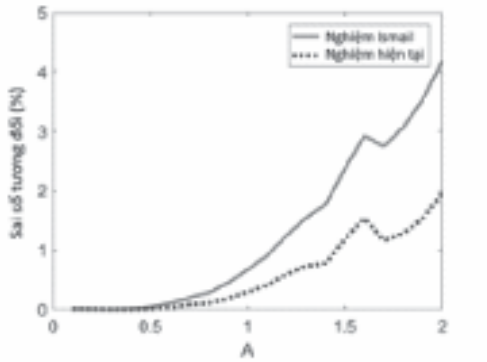
Để đánh giá hơn nữa về tiêu chuẩn đề xuất, việc khảo sát kết quả tần số dao động xấp xỉ thu được thay đổi theo tham số A là cần thiết. Trước hết, ta có thể thấy rằng tiêu chuẩn (3) cho ta điểm cực tiểu của các hàm số $E_2(\omega)$ và $E_4(\omega)$. Giá trị của đối số ω mà các hàm này cực tiểu chính là tần số cần tìm. Thông qua khảo sát số của hai hàm này theo đối số ω, ta có thể thấy các hàm này đều chỉ có một điểm cực tiểu duy nhất tại một giá trị ω dương. Cụ thể, với A = 0.5, ta thu được giá trị tần số tương ứng là $\omega = \omega_{E2} = 1.0312$ theo cách tiếp cận của Ismail, tức tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình; $\omega = \omega_{E2} = 1.0309$ theo cách tiếp cận sai số mũ bốn trung bình; trong khi đó tần số thu được từ phương pháp Runge-Kutta là $\omega = \omega_{RK} = 1.0308$. Đơn vị của tần số vòng ω được lấy là rad/s. Một lần nữa có thể thấy rằng tần số của cả ba cách tiếp cận là tương đối gần nhau. Tuy nhiên, sự sai khác giữa cách tiếp cận theo Ismail và tiếp cận theo sai số mũ bốn trung bình bắt đầu bộc lộ khi tăng giá trị của tham số biên độ A.

Trên Hình 2, giá trị số của chu kỳ dao động tương ứng với ba phương pháp đã nêu đều được hiển thị, trong đó đường nét liền màu đỏ thể hiện nghiệm thu được từ Ismail, đường nét đứt màu xanh hiển thị kết quả của tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình. Dáng điệu sai số tương đối của chu kỳ dao động so với chu kỳ dao động thu được từ thuật toán Runge-Kutta được hiển thị trên Hình 3 với A được lấy từ 0.1 đến 2.0. Ta thấy rằng khi tăng A, nhược điểm của cách tiếp cận Ismail bắt đầu bộc lộ, tức là sai số tương đối tăng dần, ở mức 4% khi A = 2, trong khi đó sai số của tiêu chuẩn mũ bốn trung bình thì nhỏ hơn, ở mức 2% khi A = 2. Từ khoảng giá trị A = 0.5 thì hầu hết tiêu chuẩn mũ bốn bình phương trung bình đều tốt hơn tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình. Điều này cũng tương đối dễ hiểu bởi vì tiêu chuẩn mũ bốn trung bình được lấy là bậc cao của sai số so với tiêu chuẩn bình phương trung bình truyền thống.



Hình 2. Chu kỳ dao động của hệ thay đổi theo tham số A với các phương pháp khác nhau

☞



Hình 3. Sai số tương đối của chu kỳ dao động của nghiệm thu được từ tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình (theo Ismail) và tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình

Bảng 1. So sánh sai số giữa các phương pháp khác nhau theo giá trị của biên độ A

A	Runge-Kutta	Karahan [11]		Leung-Guo [10]		Ismail [13]		Hiện tại	
	T	T	Sai số (%)	T	Sai số (%)	T	Sai số (%)	T	Sai số (%)
0.1	6.2747	6.2753	0.0096	6.2753	0.0096	6.2754	0.0102	6.2753	0.0097
0.2	6.2515	6.2518	0.0049	6.2518	0.0049	6.2519	0.0068	6.2520	0.0077
0.5	6.0956	6.0884	0.1171	6.0885	0.1160	6.0930	0.0427	6.0949	0.0103
1.0	5.6293	5.5258	1.8400	5.5299	1.7659	5.5922	0.6605	5.6129	0.2922
2.0	4.4959	4.6857	4.2210	4.7260	5.1175	4.3157	4.0095	4.4095	1.9234

Bức tranh sai số của phương pháp hiện tại dựa trên tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình còn được làm rõ trên Bảng 1 thông qua so sánh với các kết quả từ các công bố trước đây. Trong bảng này, hai kết quả từ công bố của Karahan [11] và công bố của Leung và Guo [10] được lấy làm minh họa. Rõ ràng rằng, với các giá trị biên độ nhỏ, hầu hết các phương pháp đều cho sai số tương đối là nhỏ, chẳng hạn với A = 0.1, sai số của các phương pháp đều ở mức 0.01%. Khi lấy A = 0.2 thì sai số tăng lên và có sự phân hóa, tức trong khi sai số của Karahan và Leung-Guo duy trì ở mức 0.05% thì sai số của Ismail và cách tiếp cận hiện tại có tăng hơn một lượng nhỏ nhất định. Khi tham số A lớn, chẳng hạn A = 2.0, sai số thu được từ tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình là nhỏ nhất, ở mức 2%, trong khi các phương pháp còn lại đều ở mức 4-5%. Từ đó có thể khẳng định rằng với biên độ lớn, việc phát triển một tiêu chuẩn sai số bậc cao là cần thiết để làm giảm sai số nghiệm xấp xỉ của hệ phi tuyến.

5. KẾT LUẬN

Việc tìm nghiệm xấp xỉ của một hệ

động lực có chứa thành phần đạo hàm cấp ba được thực hiện trong nghiên cứu này thông qua việc đề xuất sử dụng tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình. Sai số thu được từ giả thiết về dạng nghiệm tuần hoàn bậc nhất của hệ. Kết quả thu được chỉ ra rằng tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình là một tiêu chuẩn có tính hiệu quả, làm giảm sai số tương đối của nghiệm so với sai số tương đối thu được từ tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình đã biết. Với giá trị nhỏ của tham số, cụ thể là tham số A đặc trưng cho vận tốc ban đầu, các phương pháp đã biết và phương pháp sai số mũ bốn trung bình cho kết quả gần tương đương nhau về độ chính xác. Tuy nhiên khi A tăng thì sai số giữa các phương pháp đã biết có biểu hiện rõ và tăng dần. Việc sử dụng tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình làm cho sai số tương đối của nghiệm giảm đi ở mức một nửa, tức xuống còn 2% trong miền tham số khảo sát là một kết quả có thể chấp nhận được. Tần số tìm được càng chính xác thì sai khác pha chuyển động của nghiệm xấp xỉ so với nghiệm đúng (kỳ vọng) của hệ càng được cải thiện, tức giảm thiểu sai số ở mức càng nhỏ thì càng có ý nghĩa về mặt cơ học và vật lý.❖

Ngày nhận bài: **09/7/2025**
Ngày phản biện: **21/7/2025**

Tài liệu tham khảo:

[1]. John H. Hubbard, Beverly H. West, "*Differential Equations: A Dynamical Systems Approach: Higher-Dimensional Systems*". Springer-Verlag New York, (1995).

[2]. Stefan J. Linz, "*Newtonian jerky dynamics: Some general properties*". Am. J. Phys. 66 12 (1998).

[3]. J. C. Sprott, "*Simple chaotic systems and circuits*". Am. J. Phys. 68 (2000).

[4]. Fabien Kenmogne, Samuel Noubissie, Guy Bertrand Ndombou, Eric Tala Tebue, Armel Viquit Sonna, David Yemélé, "*Dynamics of two models of driven extended jerk oscillators: Chaotic pulse generations and application in engineering*". Chaos, Solitons & Fractals, 152, 111291 (2021).

[5]. H. P. W. Gottlieb, "*Simple nonlinear jerk functions with periodic solutions*". Am. J. Phys., 66, No. 10 (1998).

[6]. Bingxue Li, Bo Sang, Mei Liu, Xiaoyan Hu, Xue Zhang, Ning Wang, "*Some jerk systems with hidden chaotic dynamics*". International Journal of Bifurcation and Chaos, 33, No. 06, 2350069 (2023).

[7]. H.C. Von Baeyer, "*All shook up*". The Sciences 38,12-14 (1998).

[8]. J.C. Sprott, S.J. Linz, "*Algebraically simple chaotic flows*". International Journal of Chaos Theory and Applications, 5, 3-22 (2000).

[9]. H.P.W. Gottlieb, "*Harmonic balance approach to periodic solutions of non-linear jerk equations*". Journal of Sound and Vibration, 271, 671-683 (2004).

[10]. A.Y.T. Leungn, Zhongjin Guo, "*Residue harmonic balance approach to limit cycles of non-linear jerk equations*". International Journal of Non-Linear Mechanics, 46, 898-906 (2011).

[11]. M.M. Fatih Karahan, "*Approximate solutions for the nonlinear third-order ordinary differential equations*". Zeitschrift für Naturforschung A, 72, no. 6, pp. 547-557 (2017). https://doi.org/10.1515/zna-2016-0502.

[12]. Yusry O. El-Dib, "*The simplest approach to solving the cubic nonlinear jerk oscillator with the non-perturbative method*", 45(9), pp. 5165-5183 (2022). https://doi.org/10.1002/mma.8099.

[13]. Gamal M. Ismail, Hana Abu-Zinadah, "*Analytic approximations to non-linear third order jerk equations via modified global error minimization method*". Journal of King Saud University - Science, 33, 101219 (2021).