

MỞ ĐẦU

Tổng quan

Giải tích cấp phân số là một sự tổng quát hóa của tích phân và đạo hàm cấp số nguyên được đề cập đến lần đầu tiên trong những bức thư giữa Leibniz và L'Hospital năm 1695. Do thiếu nền tảng ứng dụng và quá phức tạp, giải tích cấp phân số không thu hút được sự quan tâm trong một thời gian dài. Tuy nhiên, thời gian gần đây, giải tích cấp phân số đã được chứng minh là công cụ có giá trị khi mô hình hóa được nhiều hiện tượng trong thực tế [1-3].

Trong một vài thập kỷ qua, lý thuyết ổn định của phương trình cấp phân số (FOE) đã nhận được nhiều sự quan tâm từ các nhà toán học và kỹ sư trong các ngành khoa học khác nhau như kỹ thuật điện, kỹ thuật sinh học, lý thuyết điều khiển, âm học, quang học, vật lý hóa học [4-11]. Nhiều hiện tượng vật lý trong thế giới thực được đặc trưng bởi FOE, tức là các phương trình liên quan đến các đạo hàm cấp không nguyên. Các mô hình cấp phân số mới này biểu diễn chính xác hơn các mô hình cấp số nguyên và cung cấp một công cụ tuyệt vời để mô tả bộ nhớ và các quá trình di truyền. Đạo hàm cấp phân số có tính chất không địa phương và các nhân suy biến yếu, nên việc phân tích tính ổn định của FOE phức tạp hơn so với các hệ cấp nguyên. Bên cạnh đó, chúng ta cũng không thể sử dụng trực tiếp các công cụ đại số cho các hệ cấp phân số vì các hệ này không có đa thức đặc trưng tương ứng hoặc một đa thức tương ứng giả với một hàm đa giá trị lũy thừa phức tạp. Mặt khác, thời gian trễ có một ảnh hưởng nhất định đến sự ổn định và hiệu suất của các hệ động lực. Sự tồn tại của thời gian trễ có thể gây ra nhiều điều không mong muốn cho các hệ thống, hoặc nói chung, thậm chí là sự không ổn định. Phương trình cấp phân số có trễ là sự kết hợp giữa phương trình có trễ và đạo hàm cấp phân số nảy sinh các yếu tố phá vỡ sinh không nguyên. Bên cạnh đó, các đa thức ổn định tương ứng có vô số không điểm cô lập và tính giải tích của chúng thường là một vấn đề phức tạp. Ví dụ, nghiên cứu tính ổn định của hệ tuyến tính cấp phân số

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + Dx(t-h),$$

phức tạp hơn nhiều với hệ phương trình vi phân thường tuyến tính do sự ổn định tiệm cận của hệ này tương đương với sự ổn định tiệm cận của phương trình vô hạn chiều tương ứng cấp tự nhiên có trễ. Hơn thế, sự tồn tại của hàm mũ e^{-sh} dẫn đến phương trình này có vô hạn nghiệm và do đó việc nghiên cứu tính ổn định của một hệ cấp phân số có trễ là cực kỳ khó khăn. Có nhiều cách tiếp cận khác để nghiên cứu tính ổn định của hệ FOE. Ye [12] và Lazarevi [13] đã nghiên cứu tính ổn định tiệm cận của FOE có trễ bằng cách sử dụng bất đẳng thức Gronwall. Trong [14], Deng đã nghiên cứu tính ổn định tiệm cận của FOE có trễ bằng cách sử dụng định lý giá trị cuối cùng của phép biến đổi Laplace. Johnson [15] đã xem xét tính ổn định và không ổn định của phương trình Korteweg và de Vries bằng cách sử dụng lý thuyết dạng Floquet và lý thuyết nhiễu loạn. Trên cơ sở của phương pháp tiếp cận hàm Lambert, một ràng buộc ổn định được suy ra trong [16] cho một lớp FOE có trễ. Trong [17], tính ổn định bền vững của FOE có trễ được xem xét bằng lý thuyết điểm bất động. Một khảo sát về tính ổn định của FOE có trễ đã được trình bày trong [18]. Trên cơ sở của phương pháp đại số và phương pháp số, Cermak [19] và Kaslik [20] đề xuất một số tiêu chuẩn ổn định tiệm cận của FOE suy biến có trễ. Bên cạnh

đó, Hale [21] đề xuất tiếp cận giải tích phức cho hệ phương trình vi phân thường và [22] dựa trên giải tích cấp phân số (đạo hàm Caputo, biến đổi Laplace và hàm Mittag–Leffler) cho các hệ cấp phân số. Đối với các hệ cấp phân số không có trễ, sử dụng phương pháp giải tích, Li [23] đã xây dựng hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định tiệm cận của FOE tuyến tính không có trễ. Sau đó, các tác giả [24–29] đã mở rộng phương pháp [23] cho FOE tuyến tính không có trễ và đề xuất các định lý ổn định Lyapunov–Krasovskii và Razumikhin. Thiết kế hàm Lyapunov là vấn đề then chốt của các phương pháp này. Tuy nhiên, thường rất khó để xây dựng một hàm Lyapunov cho các hệ cấp phân số, đặc biệt là đối với các hệ cấp phân số có trễ. Hơn nữa, trong nhiều trường hợp, việc sử dụng vết của ma trận bên trong các hàm Lyapunov có thể hữu ích trong việc chứng minh tính ổn định của các hệ vi phân thông thường, nhưng không có hiệu quả cho FOE có trễ, thậm chí không tồn tại các hàm Lyapunov như vậy.

Việc nghiên cứu tính ổn định của các hệ cấp phân số có trễ ở Việt Nam đã và đang thu được nhiều kết quả thú vị. Có hai nhóm nghiên cứu chính về các hệ cấp phân số. Nhóm do GS. Vũ Ngọc Phát (Viện Toán học, Viện hàn lâm KHCN Việt Nam) dẫn đầu tập trung nghiên cứu về điều khiển và ổn định của các hệ phương trình vi phân cấp phân số [30–32]. Trong khi đó nhóm còn lại do PGS. Trần Đình Kế (Đại học sư phạm Hà Nội I) dẫn đầu hướng đến các hệ phương trình đạo hàm riêng cấp phân số [33–34] với hướng nghiên cứu về các bất đẳng thức biến phân, tính điều khiển được.

Tính cấp thiết

Phương pháp hàm Lyapunov là một công cụ mạnh để nghiên cứu tính ổn định của các phương trình vi phân hàm. Tuy nhiên, tìm được các hàm Lyapunov Krasovskii phù hợp và đánh giá đạo hàm cấp phân số cho các hàm này vẫn còn rất khó khăn dẫn đến phương pháp này không hiệu quả khi áp dụng nghiên cứu tính ổn định của phương trình vi phân cấp phân số có trễ. Đây là nguyên nhân chính dẫn đến có rất ít kết quả về tính ổn định của FOE có trễ. Theo hiểu biết tốt nhất của tác giả, cho đến nay, làm thế nào để ổn định FOE có trễ vẫn là một bài toán mở và đầy thách thức. Trong [35, 36], để vượt qua khó khăn khi tính đạo hàm cấp phân số, các tác giả đã cố gắng xây dựng một hàm Lyapunov thích hợp. Tuy nhiên, việc chứng minh định lý chính trong các bài báo này có một lỗ hổng dẫn đến kết quả thu được là không đúng. Trong [37], các tác giả đã đề xuất một định lý ổn định Lyapunov cho FOE có trễ để thu được điều kiện đủ cho tính ổn định. Kết quả thu được cũng không chính xác, vì chứng minh của họ dựa trên một lập luận sai khi chứng minh tính xác định dương của hàm Lyapunov vô hạn chiều. Để khắc phục những hạn chế về mặt kỹ thuật khi sử dụng hàm Lyapunov trong nghiên cứu hệ FOE có trễ và bổ sung một kết quả lý thuyết khi nghiên cứu tính ổn định của hệ cấp phân số, tác giả chọn đề tài “Tính ổn định nghiệm của hệ cấp phân số có trễ”.

Cách tiếp cận

Tác giả tiếp cận đề tài từ góc độ lý thuyết trên cơ sở nghiên cứu tài liệu, tìm hiểu tình hình nghiên cứu trong và ngoài nước liên quan đến đề tài.

Phương pháp nghiên cứu

Trong đề tài, tác giả sử dụng các phương pháp giải tích như phương pháp hàm Lyapunov, biến đổi Laplace, và các bất đẳng thức ma trận tuyến tính.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Trong đề tài, đối tượng nghiên cứu của tác giả là hệ cấp phân số có trễ. Phạm vi nghiên cứu của đề tài tập trung vào tính ổn định nghiệm của hệ cấp phân số có trễ

Nội dung nghiên cứu

Nội dung nghiên cứu của đề tài chia làm 3 nội dung nhỏ:

- + Nội dung 1: Thu thập tài liệu và nghiên cứu về lý thuyết ổn định.
- + Nội dung 2: Tìm phương pháp giải tích phù hợp và tìm điều kiện để hệ cấp phân số là ổn định. Tìm ví dụ số minh họa cho kết quả chính.
- + Nội dung 3: Tổng hợp tài liệu và viết báo cáo tổng kết.

CHƯƠNG 1.

ỔN ĐỊNH VỮNG HỮU HẠN CỦA HỆ PHI TUYẾN CẤP PHÂN SỐ CÓ TRỄ VÀ NHIỀU

1. Một số khái niệm cơ bản

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số kí hiệu, khái niệm và kết quả cơ bản về giải tích phân số (xem [1-2]).

Kí hiệu: Các kí hiệu cơ bản sau được sử dụng trong bài báo.

- R là tập các số thực
- N là tập các số nguyên không âm
- C là tập các số phức
- $R^{n \times m}$ là tập các ma trận thực cỡ $(n \times m)$
- A^T là ma trận chuyển vị của ma trận A
- $\lambda(A)$ là tập tất cả các giá trị riêng của ma trận A
- $\lambda_{\max}(A) = \max \{ \operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \lambda(A) \};$
- $\lambda_{\min}(A) = \min \{ \operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \lambda(A) \};$
- chuẩn phổ của ma trận A được định nghĩa $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$
- $C([a, b], R^n)$ là tập các hàm thực liên tục trên tập $[a, b]$ và nhận giá trị trong R^n
- $[a]$ là phân nguyên của số thực a ; $\overline{1, m} = \{1, 2, \dots, m\}$
- Ma trận $P \in R^n$ là xác định dương ($P > 0$) nếu $x^T P x > 0, \forall x \in R^n, x \neq 0$.
 $P > Q$ nghĩa là $P - Q > 0$.
- Hàm Gamma được định nghĩa bởi $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, z \in C, \operatorname{Re}(s) > 0$.
- Hàm Mittag-Leffler với hai tham số được xác định bởi

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)},$$

trong đó $\alpha > 0, \beta > 0, z \in C$. Với $\beta = 1$, chúng ta kí hiệu $E_\alpha(z) = E_{\alpha, 1}(z)$.

Bổ đề 1.1 (xem [1-2])

Cho $\alpha \in (0, 1), z \in C, \operatorname{Re}(z) > 0$, chúng ta có

i) hàm $\Gamma(z)$ hội tụ.

ii) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Đặc biệt, $\Gamma(n+1) = n!$ với $n \in N$.

Bổ đề 1.2 (xem [1-2])

Cho $\alpha > 0$, chúng ta có

i) $E_\alpha(z) \geq 1, \forall z \in \mathbb{R}^+$;

ii) $E_\alpha(z)$ là đơn điệu tăng trên tập số thực dương $\mathbb{R}^+$;

iii) $E_{\alpha,\alpha}(ht^\alpha) \geq 0, \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(h(t-s)^\alpha) ds = \frac{E_\alpha(ht^\alpha) - 1}{h}$ nếu $h > 0, t \geq 0$.

Định nghĩa 1.3 (xem [1-2])

Tích phân Riemann-Liouville cấp $\alpha \in (0,1)$ của hàm $f(t)$ được định nghĩa

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Đạo hàm Riemann-Liouville cấp $\alpha \in (0,1)$ của hàm $f(t)$ được định nghĩa

$$D_R^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} (I^{1-\alpha} f(t)).$$

Định nghĩa 1.4 (xem [1-2])

Đạo hàm Caputo cấp $\alpha \in (0,1)$ của hàm $f(t)$ được định nghĩa

$$D^\alpha f(t) = D_R^\alpha (f(t) - f(0)).$$

Biến đổi Laplace của hàm khả tích $f(t)$ được định nghĩa

$$L[f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Bổ đề 1.5 (xem [1-2])

Cho trước hàm khả tích $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ và $\alpha \in (0,1), \beta > 0, h > 0$, chúng ta có

i) $L[D^\alpha f(t)](s) = s^\alpha L[f(t)](s) - s^{\alpha-1} f(0)$.

ii) $L[t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(ht^\alpha)](s) = \frac{1}{s^\alpha - h}$;

$$L[E_\alpha(ht^\alpha)](s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - h};$$

iii) $L[f * g(t)](s) = L[f(t)](s) L[g(t)](s)$, với tích chập $f * g(t) = \int_0^t f(s) g(t-s) ds$.

2. Kết quả chính

Xét hệ cấp phân số có trễ và nhiễu tuyến tính sau

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Dx(t-h) + f(x(t)) + Bw(t), \\ x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-h, 0], \end{cases} \quad (1.1)$$

trong đó

- $\alpha \in (0, 1)$, $h > 0$; $x(t) \in R^n$ là véc tơ trạng thái
- $A, D \in R^{n \times n}$; $B \in R^{n \times m}$ là các ma trận hằng số
- Nhiễu liên tục $w(t) \in R^m$ thỏa mãn điều kiện

$$\exists \eta > 0: w(t)^T w(t) \leq \eta^2, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.2)$$

- Hàm điều kiện ban đầu $\varphi(t) \in C([-h, 0], R^n)$ với chuẩn $\|\varphi\| = \sup_{s \in [-h, 0]} \|\varphi(s)\|$.
- Hàm phi tuyến $f: R^n \rightarrow R^n$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục trên R^n và $\exists d > 0: \|f(x)\| \leq d\|x\|, \quad \forall x \in R^n. \quad (1.3)$

Định nghĩa 1.6.

$x(t)$ được gọi là nghiệm của hệ (1.1) nếu $x(t) \in C([0, \infty], R^n)$ và thỏa mãn (1.1) với điều kiện ban đầu $\varphi(t) \in C([-h, 0], R^n)$.

Mệnh đề 1.7

Giả sử $\varphi(t) \in C([-h, 0], R^n)$ và các điều kiện (1.2) và (1.3) thỏa mãn. Khi đó hệ (1.1) có duy nhất nghiệm $x(t) \in C([0, \infty], R^n)$.

Bổ đề 1.8

Cho $\alpha \in (0, 1)$; $x(t) \in C([0, \infty), R^n)$ là một nghiệm của phương trình (1.1) và một ma trận đối xứng xác định dương $P \in R^{n \times n}$. Khi đó,

$$D^\alpha (x(t)^T P x(t)) \leq 2x(t)^T P D^\alpha (x(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

Định nghĩa 1.9 (Ổn định vững hữu hạn)

Cho trước các số dương c_1, c_2, T, η . Hệ (1.1) là ổn định vững hữu hạn tương ứng với bộ số (c_1, c_2, T, η) nếu

$$\|\varphi\| < c_1 \Rightarrow \|x(t)\| < c_2, \quad \forall t \in [0, T],$$

với mọi nhiễu $w(t)$ thỏa mãn điều kiện (1.2).

Định lý dưới đây là kết quả chính của Chương 1.

Định Lý 1.10

Hệ (1.1) là ổn định vững hữu hạn tương ứng với bộ các số dương cho trước (c_1, c_2, T, η) nếu tồn tại các số thực dương γ_1, γ_2 và các ma trận đối xứng xác định dương P, Q thỏa mãn các điều kiện sau

$$W = \begin{bmatrix} PA + [PA]^T + \gamma_1 d^2 - hP & PD & P & PB \\ [PD]^T & -Q & 0 & 0 \\ P & 0 & -\gamma_1 I_n & 0 \\ [PB]^T & 0 & 0 & -\gamma_2 I_m \end{bmatrix} < 0, \quad (1.4)$$

$$Q < hP, \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \left(E_\alpha(hT^\alpha) \lambda_{\max}(P) c_1 + \gamma_2 \eta^2 \frac{E_\alpha(hT^\alpha) - 1}{h} \right) \sum_{i=0}^{[T/h]+1} (E_\alpha(hT^\alpha) - 1)^i \leq c_2. \quad (1.6)$$

Chứng minh.

Xét hàm Lyapunov dạng toàn phương

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t).$$

Lấy đạo hàm Caputo cấp α của hàm $V(x(t))$, từ Bổ đề 1.8 và điều kiện (1.2) - (1.3) ta thu được

$$\begin{aligned} D^\alpha (V(x(t))) &\leq 2x(t)^T P D^\alpha x(t) = 2x(t)^T P (Ax(t) + Dx(t-h) + f(x(t)) + Bw(t)) \\ &\leq 2x(t)^T P (Ax(t) + Dx(t-h) + f(x(t)) + Bw(t)) \\ &\quad - x(t-h)^T Q x(t-h) + x(t-h)^T Q x(t-h) \\ &\quad - \gamma_1 f(x(t))^T f(x(t)) + \gamma_1 d^2 \|x(t)\|^2 \\ &\quad - \gamma_2 w(t)^T w(t) + \gamma_2 \eta^2 \\ &\quad - hx(t)^T P x(t) + hV(x(t)). \end{aligned}$$

Đặt $\zeta(t) = (x(t), x(t-h), f(x(t)), w(t))^T$, ta thu được từ (1.4)- (1.5) bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} M(t) &= D^\alpha (V(x(t))) - hV(x(t)) \\ &\leq \zeta(t)^T W \zeta(t) + x(t-h)^T Q x(t-h) + \gamma_2 \eta^2 \\ &\leq x(t-h)^T Q x(t-h) + \gamma_2 \eta^2 \\ &\leq hx(t-h)^T P x(t-h) + \gamma_2 \eta^2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Áp dụng biến đổi Laplace hai vế của phương trình

$$M(t) = D^\alpha (V(x(t))) - hV(x(t)),$$

ta thu được từ Bổ đề 1.5 (i) đẳng thức

$$\begin{aligned}
L[M(t)](s) &= L[D^\alpha(V(x(t)))](s) - hL[V(x(t))](s) \\
&= s^\alpha L[V(x(t))](s) - s^{\alpha-1}V(x(0)) - hL[V(x(t))](s) \\
&= (s^\alpha - h)L[V(x(t))](s) - s^{\alpha-1}V(x(0))
\end{aligned}$$

tương đương với

$$\begin{aligned}
L[V(x(t))](s) &= (s^\alpha - h)^{-1} (L[M(t)](s) + s^{\alpha-1}V(x(0))) \\
&= \frac{1}{s^\alpha - h} L[M(t)](s) + \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - h} V(x(0)) \\
&= L[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ht^\alpha)](s) L[M(t)](s) + L[E_\alpha(ht^\alpha)](s) V(x(0)) \\
&= L[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ht^\alpha) * M(t)](s) + L[E_\alpha(ht^\alpha)V(x(0))](s) \\
&= L[E_\alpha(ht^\alpha)V(x(0)) + t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ht^\alpha) * M(t)](s),
\end{aligned}$$

do Bổ đề 1.5 (ii) - (iii).

Từ các biểu diễn sau (xem Bổ đề 1.2 (iii))

$$(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(h(t-s)^\alpha) \geq 0, \forall s \in [0, t],$$

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(h(t-s)^\alpha)ds = \frac{E_\alpha(ht^\alpha) - 1}{h},$$

sử dụng biến đổi Laplace ngược, ta thu được

$$\begin{aligned}
V(x(t)) &= E_\alpha(ht^\alpha)V(x(0)) + t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ht^\alpha) * M(t) \\
&= E_\alpha(ht^\alpha)V(x(0)) + \int_0^t M(s)(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(h(t-s)^\alpha)ds \\
&\leq E_\alpha(ht^\alpha)V(x(0)) + \sup_{s \in [0, t]} M(s) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(h(t-s)^\alpha)ds \\
&= E_\alpha(ht^\alpha)V(x(0)) + \sup_{s \in [0, t]} M(s) \frac{E_\alpha(ht^\alpha) - 1}{h}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Từ bất đẳng thức (1.7), ta thấy

$$\begin{aligned}
\sup_{s \in [0, t]} M(s) &\leq \sup_{s \in [0, t]} (hx(s-h)^T Px(s-h) + \gamma_2 \eta^2) \\
&= h \sup_{s \in [0, t]} (x(s-h)^T Px(s-h)) + \gamma_2 \eta^2 \\
&= h \sup_{s \in [-h, t-h]} V(s) + \gamma_2 \eta^2.
\end{aligned}$$

Kết hợp bất đẳng thức trên với (1.8), ta thu được

$$V(x(t)) \leq E_\alpha(ht^\alpha)V(x(0)) + \left(h \sup_{s \in [-h, t-h]} V(s) + \gamma_2 \eta^2 \right) \frac{E_\alpha(ht^\alpha) - 1}{h}. \tag{1.9}$$

Tiếp theo ta sẽ đánh giá $V(x(\theta))$ với $\theta \in [-h, t]$, $t \leq T$.

- Trên đoạn $[-h, 0]$, do $E_\alpha(ht^\alpha) \geq 1$, $t \geq 0$ (xem Bổ đề 1.2 (i)),

$$\begin{aligned} V(x(\theta)) &= x(\theta)^T P x(\theta) = \varphi(\theta)^T P \varphi(\theta) \\ &\leq \lambda_{\max}(P) \|\varphi(\theta)\|^2 \leq \lambda_{\max}(P) \|\varphi\|^2 \leq \lambda_{\max}(P) \|\varphi\|^2 E_{\alpha}(hT^{\alpha}). \end{aligned} \quad (1.10)$$

- Trên đoạn $[0, t]$, do bất đẳng thức (1.9) thỏa mãn với mọi $t \geq 0$, và $E_{\alpha}(z)$ là đơn điệu tăng trên tập số thực dương R^+ (xem Bổ đề 1.2 (ii)), ta có

$$\begin{aligned} V(x(\theta)) &\leq E_{\alpha}(h\theta^{\alpha})V(x(0)) + \left(h \sup_{s \in [-h, t-h]} V(s) + \gamma_2 \eta^2 \right) \frac{E_{\alpha}(h\theta^{\alpha}) - 1}{h} \\ &\leq E_{\alpha}(hT^{\alpha}) \lambda_{\max}(P) \|\varphi\|^2 + \left(h \sup_{s \in [-h, t-h]} V(s) + \gamma_2 \eta^2 \right) \frac{E_{\alpha}(hT^{\alpha}) - 1}{h} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Từ (1.10) và (1.11),

$$\sup_{s \in [-h, t]} V(s) \leq E_{\alpha}(hT^{\alpha}) \lambda_{\max}(P) \|\varphi\|^2 + \left(h \sup_{s \in [-h, t-h]} V(s) + \gamma_2 \eta^2 \right) \frac{E_{\alpha}(hT^{\alpha}) - 1}{h}. \quad (1.12)$$

Đặt

$$\begin{aligned} H(t) &= \sup_{s \in [-h, t]} V(s), \quad t \in [-h, T]; \quad b = E_{\alpha}(hT^{\alpha}) - 1; \\ a &= E_{\alpha}(hT^{\alpha}) \lambda_{\max}(P) \|\varphi\|^2 + \gamma_2 \eta^2 \frac{E_{\alpha}(hT^{\alpha}) - 1}{h}. \end{aligned}$$

Chúng ta viết lại bất đẳng thức (1.12)

$$H(t) \leq a + bH(t-h), \quad t \in [0, T].$$

Bằng công thức truy hồi dẫn đến

$$H(t) \leq \begin{cases} a \sum_{i=0}^{[t/h]} b^i + b^{[t/h]+1} H(t - ([t/h]+1)h), & [t/h] \geq 1, \\ a + bH(t - ([t/h]+1)h) & [t/h] = 0. \end{cases}$$

Do hàm $H(t)$ là hàm đơn điệu tăng trên tập $[-h, T]$ và $t - ([t/h]+1)h < 0$, ta thu được

$$\begin{aligned} H(t) &\leq a \sum_{i=0}^{[t/h]} b^i + b^{[t/h]+1} H(0) \\ &\leq a \sum_{i=0}^{[t/h]} b^i + b^{[t/h]+1} \lambda_{\max}(P) \|\varphi\|^2 \leq a \sum_{i=0}^{[t/h]+1} b^i \\ &\leq \left(E_{\alpha}(hT^{\alpha}) \lambda_{\max}(P) \|\varphi\|^2 + \gamma_2 \eta^2 \frac{E_{\alpha}(hT^{\alpha}) - 1}{h} \right) \sum_{i=0}^{[T/h]+1} (E_{\alpha}(hT^{\alpha}) - 1)^i. \end{aligned}$$

Từ đây,

$$\begin{aligned} \|x(t)\|^2 &\leq \frac{x(t)^T P x(t)}{\lambda_{\min}(P)} \leq \frac{H(t)}{\lambda_{\min}(P)} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \left(E_{\alpha}(hT^{\alpha}) \lambda_{\max}(P) \|\varphi\|^2 + \gamma_2 \eta^2 \frac{E_{\alpha}(hT^{\alpha}) - 1}{h} \right) \sum_{i=0}^{[T/h]+1} (E_{\alpha}(hT^{\alpha}) - 1)^i. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Nếu $\|\varphi\|^2 \leq c_1$ thì theo (1.6) và (1.13), ta có

$$\begin{aligned}\|x(t)\|^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \left(E_{\alpha}(hT^{\alpha}) \lambda_{\max}(P) \|\varphi\|^2 + \gamma_2 \eta^2 \frac{E_{\alpha}(hT^{\alpha}) - 1}{h} \right) \sum_{i=0}^{[T/h]+1} (E_{\alpha}(hT^{\alpha}) - 1)^i \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \left(E_{\alpha}(hT^{\alpha}) \lambda_{\max}(P) c_1 + \gamma_2 \eta^2 \frac{E_{\alpha}(hT^{\alpha}) - 1}{h} \right) \sum_{i=0}^{[T/h]+1} (E_{\alpha}(hT^{\alpha}) - 1)^i \leq c_2.\end{aligned}$$

Nói cách khác hệ (1.1) là ổn định vững hữu hạn tương ứng với bộ các số thực dương (c_1, c_2, T, η) .

□

Nhận xét 1.1

Điều kiện (1.4) và (1.5) là các bất đẳng thức ma trận tuyến tính và từ chỗ các số c_1, c_2 không xuất hiện trong (1.4) và (1.5) do đó chúng ta có thể tìm được các biến P, Q, γ_1, γ_2 từ các bất đẳng thức ma trận tuyến tính này và sau đó kiểm tra điều kiện (1.6).

Thuật toán:

- i) Sử dụng LMI Toolbox trong Matlab để tìm P, Q, γ_1, γ_2 từ (1.4) và (1.5)
- ii) Kiểm tra tính ổn định vững hữu hạn từ điều kiện (1.6).

Nhận xét 1.2

Định Lý 1.10 đưa ra điều kiện đủ cho tính ổn định vững hữu hạn cho hệ (1.1). Hơn thế, sẽ thú vị hơn nếu chúng ta có thể tìm được c_2 nhỏ nhất (hoặc tìm được giá trị lớn nhất của T). Bài toán này có thể xem như tối ưu hóa một biến như sau

$$\min \{c_2 : P, Q, \gamma_1, \gamma_2 \text{ s.t. (3.1)–(3.2)–(3.3)}\}.$$

Nhận xét 1.3

Sử dụng hàm Lyapunov là một công cụ mạnh để nghiên cứu tính ổn định của các phương trình vi phân thường. Tuy nhiên, còn nhiều thách thức khi sử dụng phương pháp này cho các hệ cấp phân số có trễ do khó khăn trong việc thiết lập cũng như tính đạo hàm cấp phân số cho các hàm Lyapunov. Đây chính là lí do có rất ít kết quả ổn định cho hệ cấp phân số có trễ. Điều này chỉ ra tính vượt trội của phương pháp được đề cập trong bài báo của chúng tôi.

Nhận xét 1.4

Tiếp theo chúng ta sẽ áp dụng Định lý 1.10 để nghiên cứu tính ổn định vững hữu hạn cho hệ bất định sau

$$\begin{cases} D^{\alpha} x(t) &= [A + \Delta A]x(t) + Dx(t-h) + Bw(t), \\ x(s) &= \varphi(s), \quad s \in [-h, 0], \end{cases} \quad (1.14)$$

trong đó $\Delta A = KF(t)L$ là bất định có cấu trúc với K, L là các ma trận đã biết, $F(t)$ là hàm ma trận không xác định thỏa mãn

$$F(t)^T F(t) \leq I, \quad \forall t \geq 0.$$

Để áp dụng Định Lý 1.10, chúng ta kí hiệu

$$f(x(t)) = \Delta Ax(t).$$

Ta thấy,

$$\begin{aligned}
\|f(x(t))\|^2 &= (\Delta Ax(t))^T \Delta Ax(t) = x(t)^T L^T F(t)^T K^T K F(t) L x(t) \\
&\leq \lambda_{\max}(K^T K) x(t)^T L^T F(t)^T F(t) L x(t) \\
&\leq \lambda_{\max}(K^T K) x(t)^T L^T L x(t) \\
&\leq \lambda_{\max}(K^T K) \lambda_{\max}(L^T L) x(t)^T x(t) = \lambda_{\max}(K^T K) \lambda_{\max}(L^T L) \|x(t)\|^2,
\end{aligned}$$

chỉ ra

$$\|f(x(t))\| \leq \sqrt{\lambda_{\max}(K^T K) \lambda_{\max}(L^T L)} \|x(t)\|.$$

Chọn $d = \sqrt{\lambda_{\max}(K^T K) \lambda_{\max}(L^T L)}$, cùng với các kí hiệu giống như trong Định lý 1.10, chúng ta có một hệ quả tương tự về tính ổn định vững cho hệ (1.14).

Ví dụ 1.11

Xét hệ (1.1) với

$$\begin{aligned}
&\alpha = 0,5; h = 0,2; d = 0,1; \eta = 0,1; \\
A &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 \end{bmatrix};
\end{aligned}$$

Sử dụng LMI Toolbox trong phần mềm Matlab, các LMI (1.4) và (1.5) thỏa mãn với

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} 20,0413 & 8,7377 \\ 8,7377 & 30,7371 \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} 2,9476 & 1,2287 \\ 1,2287 & 4,2762 \end{bmatrix}; \\
\gamma_1 &= 51,6949; \gamma_2 = 40,9883;
\end{aligned}$$

Với

$$c_1 = 0,01; c_2 = 0,3; T = 5;$$

chúng ta tìm được

$$\lambda_{\min}(P) = 15,1448; \lambda_{\max}(P) = 35,6336; E_{\alpha}(hT^{\alpha}) = 1,7990;$$

Từ đây, điều kiện (1.6) thỏa mãn

$$\frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \left(E_{\alpha}(hT^{\alpha}) \lambda_{\max}(P) c_1 + \gamma_2 \eta^2 \frac{E_{\alpha}(hT^{\alpha}) - 1}{h} \right) \sum_{i=0}^{[T/h]+1} (E_{\alpha}(hT^{\alpha}) - 1)^i = 0,2817 < c_2 = 0,3.$$

Do đó, theo Định lý 1.10, hệ (1.1) là ổn định vững hữu hạn tương ứng với bộ số $(c_1, c_2, T, \eta) = (0,01; 0,3; 5; 0,1)$.

KẾT LUẬN CỦA CHƯƠNG 1.

Chương 1 nghiên cứu tính ổn định vững hữu hạn cho hệ phi tuyến cấp phân số có trễ và nhiễu. Tiếp cận này dựa trên hàm Lyapunov và biến đổi Laplace, đưa đến một điều kiện đủ phụ thuộc trễ (Định Lý 3.1) được biểu diễn bởi các bất đẳng thức ma trận tuyến tính và hàm Mittag Leffler. Các kết quả của chương được đảm bảo bởi bài đã chấp nhận đăng vào Số 80, tháng 8 năm 2022, tạp chí Khoa học, Trường ĐHSP Hà Nội 2.

CHƯƠNG 2.

SỰ THỤ ĐỘNG TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CHO HỆ CẤP PHÂN SỐ ATANGANA-BALEANU-CAPUTO CÓ NHIỀU PHI TUYẾN

1. Một số khái niệm cơ bản

Trong chương 2, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm mới AB tích phân: ${}^{AB}I_t^\alpha f(t)$, đạo hàm cấp phân số AB Caputo: ${}^{ABC}D_t^\alpha f(t)$, $\alpha \in (0, 1)$ cho hàm khả vi liên tục $f(t) \in L_1(0, \infty)$ lần lượt:

$${}^{AB}I_t^\alpha f(t) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

$${}^{ABC}D_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t \dot{f}(s) E_\alpha \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} (t-s)^\alpha \right) ds,$$

trong đó $B(\alpha)$ là hàm thực thỏa mãn $B(\alpha) > 0$, $B(0) = B(1) = 0$.

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại một số tính chất của đạo hàm và tích phân trên được trình bày chi tiết trong [38].

Bổ đề 2.1 (xem [38])

Nếu $f(t)$ là hàm khả vi liên tục sao cho $f(t) \in L_1(0, \infty)$ thì

$${}^{AB}I_t^\alpha \left({}^{ABC}D_t^\alpha f(t) \right) = f(t) - f(0), \quad \forall t \geq 0.$$

Bổ đề 2.2 (xem [39])

Cho $x(t) \in R^n$ là một véc tơ hàm khả vi liên tục và ma trận đối xứng $Q > 0$. Khi đó, với mọi $t \geq 0$, bất đẳng thức sau là đúng

$${}^{ABC}D_t^\alpha \left(x(t)^T Q x(t) \right) \leq 2x(t)^T Q {}^{ABC}D_t^\alpha x(t).$$

Xét hệ phi tuyến ABC cấp phân số như sau

$$\begin{cases} {}^{ABC}D_t^\alpha x(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [W + \Delta W(t)]\omega(t) + f(t, x(t), \omega(t)), & t \geq 0, \\ z(t) = Mx(t) + N\omega(t), \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

trong đó

- $\alpha \in (0, 1)$, $x(t) \in R^n$ là véc tơ trạng thái,
- $\omega(t) \in R^p$ là nhiễu đầu vào,
- $z(t) \in R^q$ là véc tơ đầu ra,
- $A \in R^{n \times n}$, $W \in R^{n \times p}$, $M \in R^{q \times n}$, $N \in R^{q \times p}$ là các ma trận hệ thống hằng số,
- $\Delta A = E_a F_a(t) H_a$, $\Delta W = E_w F_w(t) H_w$, với các ma trận hằng số E_a , H_a , E_w , H_w , và các ma trận bất định $F_a(t)$, $F_w(t)$ thỏa mãn

$$F_a(t)^T F_a(t) \leq I, F_w(t)^T F_w(t) \leq I, \quad \forall t \geq 0.$$

Để thuận tiện cho việc trình bày kết quả chính, chúng tôi luôn sử dụng các giả thiết sau.

GT1: Hàm phi tuyến $f(t, x, \omega)$ thỏa mãn

$$f(t, x, \omega)^T f(t, x, \omega) \leq x^T G_x x + \omega^T G_\omega \omega, \quad \forall (t, x, \omega), \quad (2.2)$$

với G_x, G_ω là các ma trận hằng số thích hợp.

GT2: Nhiễu phi tuyến đầu vào $\omega(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$\exists d > 0: \quad \|\omega(t)\|^2 \leq d, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.3)$$

Định nghĩa 2.3.

Cho trước các hằng số dương c_1, c_2, T, d , và ma trận đối xứng xác định dương S . Hệ (2.1) được nói là ổn định vững hữu hạn tương ứng với (c_1, c_2, T, S, d) nếu

$$x(0)^T S x(0) \leq c_1 \Rightarrow x(t)^T S x(t) \leq c_2, \quad \forall t \in [0, T],$$

và các nhiễu đầu vào thỏa mãn **GT1** (2.2).

Định nghĩa 2.4.

Hệ (2.1) được nói là thụ động hữu hạn tương ứng với (c_1, c_2, T, S, d) nếu hai điều kiện sau thỏa mãn:

- (i) Hệ (2.1) là ổn định vững hữu hạn tương ứng với (c_1, c_2, T, S, d) ,
- (ii) Với điều kiện ban đầu $x(0) = 0$, tồn tại $\gamma > 0$ sao cho

$$2^{AB} I_t^\alpha (z(t)^T \omega(t)) \geq -\gamma^{AB} I_t^\alpha (\omega(t)^T \omega(t)), \quad \forall t \in [0, T].$$

Nhận xét 2.1

Có nhiều định nghĩa đạo hàm cấp phân số được giới thiệu trong giải tích phân số. Một trong số các định nghĩa được quan tâm nhiều nhất là đạo hàm Grunwald-Letnikov, đạo hàm Riemann-Liouville, và đạo hàm Caputo. Ưu và nhược điểm của các đạo hàm trên được thảo luận chi tiết trong [40]. Tuy nhiên, các tác giả trong [41] chỉ ra rằng nhiều hiện tượng trong thực tế không thể mô tả chính xác bằng các đạo hàm trên do sự tồn tại một điểm kỳ dị nhân tạo tại điểm ban đầu của nhân lũy thừa. Để vượt qua các nhược điểm này, Caputo và Fabrizio [42] đã đề xuất một định nghĩa đạo hàm cấp phân số mới dựa trên một nhân lũy thừa không suy biến, yếu tố cho phép điều này đã loại bỏ hạn chế của điểm kỳ dị trong nhân lũy thừa. Mặc dù vậy, đạo hàm cấp phân số mới này chỉ có tính địa phương [43]. Gần đây, Atangana và Baleanu [41] đề xuất hai toán tử đạo hàm cấp phân số mới (theo Riemann-Liouville và theo Caputo) dựa trên tính không địa phương và hàm Mittag-Leffler không suy biến, hàm này sở hữu một liên kết mạnh với lý thuyết vi phân cấp phân số [44]. Toán tử đạo hàm cấp phân số ABC dựa trên biểu diễn nhân Mittag-Leffler và ưu điểm của toán tử đạo hàm Caputo, thêm vào đó nhân này liên kết với tính không suy biến. Hệ bậc phân số ABC đã nhận được nhiều sự quan tâm trong những năm

gần đây do có nhiều ứng dụng trong việc mô hình hóa các hiện tượng thực tế. Do đó, chúng tôi tập trung vào bài toán thụ động hữu hạn cho hệ phân số phi tuyến liên kết với đạo hàm ABC trong chương này.

2. Kết quả chính

Để chỉ ra tính thụ động hữu hạn của hệ (2.1), đầu tiên chúng tôi chỉ ra hệ (2.1) là ổn định vững hữu hạn.

Trước hết, chúng tôi sử dụng các ký hiệu sau trong định lý chính.

- $f(\cdot) = f(t, x(t), \omega(t))$,
- $\bar{Q} = S^{-1/2} Q S^{-1/2}$, $s_1 = \lambda_{\min}(\bar{Q})$, $s_2 = \lambda_{\max}(\bar{Q})$,
- $E_{11} = QA + A^T Q + v_1 H_a^T H_a + v G_x^T G_x$,
- $E_{33} = -\varepsilon I + v_2 H_w^T H_w + v G_w^T G_w$.

Định lý 2.5.

Hệ (2.1) là ổn định vững hữu hạn tương ứng với (c_1, c_2, T, S, d) , nếu tồn tại ma trận đối xứng xác định dương Q và các hằng số thực dương v_1, v_2, v, ε thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{bmatrix} E_{11} & Q & QW & QE_a & QE_w \\ * & -vI & 0 & 0 & 0 \\ * & * & E_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & -v_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -v_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.4)$$

$$c_1 s_2 + \frac{\varepsilon(1-\alpha)d}{B(\alpha)} + \frac{\varepsilon\alpha d}{B(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha \leq s_1 c_2. \quad (2.5)$$

Chứng minh.

Xét hàm toàn phương

$$V(t) = x(t)^T Q x(t).$$

Từ Bổ đề 2.2, chúng ta có

$$\begin{aligned} {}^{ABC}D_t^\alpha (V(t)) &= {}^{ABC}D_t^\alpha (x(t)^T Q x(t)) \leq 2x(t)^T Q {}^{ABC}D_t^\alpha x(t) \\ &= 2x(t)^T Q ([A + \Delta A(t)]x(t) + [W + \Delta W(t)]\omega(t) + f(\cdot)) \\ &= x(t)^T [QA + A^T Q]x(t) + 2x(t)^T QE_a F_a(t) H_a x(t) + 2x(t)^T QW \omega(t) \\ &\quad + 2x(t)^T QE_w F_w(t) H_w \omega(t) + 2x(t)^T Qf(\cdot). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy và tính chất của các hàm $F_a(t), F_w(t)$, chúng ta nhận được các bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
& 2x(t)^T QE_a F_a(t) H_a x(t) \\
& \leq v_1^{-1} x(t)^T QE_a [QE_a]^T x(t) + v_1 x(t)^T [F_a(t) H_a]^T F_a(t) H_a x(t) \\
& \leq v_1^{-1} x(t)^T QE_a [QE_a]^T x(t) + v_1 x(t)^T [H_a]^T H_a x(t)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
& 2x(t)^T QE_w F_w(t) H_w \omega(t) \\
& \leq v_2^{-1} x(t)^T QE_w [QE_w]^T x(t) + v_2 \omega(t)^T [F_w(t) H_w]^T F_w(t) H_w \omega(t) \\
& \leq v_2^{-1} x(t)^T QE_w [QE_w]^T x(t) + v_2 \omega(t)^T [F_w(t) H_w]^T F_w(t) H_w \omega(t)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Giả thiết GT1(2.2) chỉ ra

$$vx(t)^T G_x x(t) + v\omega^T G_\omega \omega - v f(\cdot)^T f(\cdot) \leq 0. \tag{2.9}$$

Từ (2.6) đến (2.9), chúng ta thu được

$${}^{ABC}D_t^\alpha (V(t)) \leq \xi(t)^T \Psi \xi(t) + \varepsilon \omega(t)^T \omega(t), \tag{2.10}$$

trong đó

- $\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ f(\cdot) \\ \omega(t) \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & Q & QW \\ * & -vI & 0 \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix},$
- $\Psi_{11} = QA + A^T Q + v_1^{-1} QE_a E_a^T Q + v_1 H_a^T H_a + v_2^{-1} QE_w E_w^T Q + v G_x^T G_x,$
- $\Psi_{33} = -\varepsilon I + v_2 H_w^T H_w + v G_w^T G_w.$

Sử dụng bổ đề Schur Complement, LMI (2.4) tương đương với $\Psi < 0$. Kết hợp nhận định này và (2.10), chúng ta có

$${}^{ABC}D_t^\alpha (V(t)) \leq \varepsilon \omega(t)^T \omega(t). \tag{2.11}$$

Lấy tích phân Atangana-Baleanu cả 2 vế của bất đẳng thức (2.11) từ 0 đến t, sử dụng Bổ đề 2.1 cùng với giả thiết GT2 (2.3) dẫn đến

$$\begin{aligned}
x(t)^T Qx(t) & \leq x(0)^T Qx(0) + {}^{AB}I_t^\alpha (\varepsilon \omega(t)^T \omega(t)) \\
& = x(0)^T Qx(0) + \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \varepsilon \omega(t)^T \omega(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varepsilon \omega(s)^T \omega(s) ds \\
& \leq x(0)^T Qx(0) + \frac{\varepsilon d(1-\alpha)}{B(\alpha)} + \frac{\varepsilon d\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
& \leq x(0)^T Qx(0) + \frac{\varepsilon d(1-\alpha)}{B(\alpha)} + \frac{\varepsilon d\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Từ các bất đẳng thức,

$$x(t)^T Qx(t) = x(t)^T S^{1/2} \bar{Q} S^{1/2} x(t) \geq \lambda_{\min}(\bar{Q}) x(t)^T Sx(t) \geq s_1 x(t)^T Sx(t),$$

$$x(0)^T Qx(0) = x(0)^T S^{1/2} \bar{Q} S^{1/2} x(0) \leq \lambda_{\max}(\bar{Q}) x(0)^T Sx(0) \leq s_2 x(0)^T Sx(0),$$

(2.5) và (2.12) nếu $x(0)^T Sx(0) \leq c_1$ thì

$$\begin{aligned} s_1 x(t)^T Sx(t) &= \lambda_{\min}(\bar{Q}) x(t)^T Sx(t) \leq x(t)^T Qx(t) \\ &\leq x(0)^T Qx(0) + \frac{\varepsilon d(1-\alpha)}{B(\alpha)} + \frac{\varepsilon d\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq x(0)^T Qx(0) + \frac{\varepsilon d(1-\alpha)}{B(\alpha)} + \frac{\varepsilon d\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq s_2 c_1 + \frac{\varepsilon d(1-\alpha)}{B(\alpha)} + \frac{\varepsilon d\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq s_1 c_2. \end{aligned}$$

Hệ quả là

$$x(t)^T Sx(t) \leq c_2, \quad \forall t \in [0, T].$$

Do đó, hệ (2.1) ổn định vững hữu hạn tương ứng với (c_1, c_2, T, S, d) .

Nhận xét 2.2

Bằng cách sử dụng bất đẳng thức Gronwall Atangana-Baleanu cấp phân số và biến đổi Laplace của đạo hàm ABC, các tác giả [39] khảo sát bài toán ổn định hữu hạn và ổn định vững hữu hạn cho một lớp hệ tuyến tính cấp phân số ABC. Tuy nhiên, giả thiết của nhiều phi tuyến $f(t, x(t), \omega(t))$, ΔA , ΔW không được đề cập trong kết quả này. Định lý 2.5 đã giải bài toán này cho hệ (2.1) cấp phân số ABC cùng nhiều phi tuyến với véc tơ đầu ra 0 bằng cách sử dụng bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Do đó, hệ (2.1) là tổng quát hơn các kết quả trong [39].

Quay lại hệ trong [39] dạng

$$\begin{cases} {}^{ABC}D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + W\omega(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Từ Định lý 2.5, chúng ta ngay lập tức có hệ quả sau.

Hệ quả 2.6.

Hệ (2.1) là ổn định vững hữu hạn tương ứng với (c_1, c_2, T, S, d) , nếu tồn tại ma trận đối xứng xác định dương Q và hằng số thực dương ε thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{bmatrix} QA + A^T Q & QW \\ * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.14)$$

$$c_1 s_2 + \frac{\varepsilon(1-\alpha)d}{B(\alpha)} + \frac{\varepsilon\alpha d}{B(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha \leq s_1 c_2. \quad (2.15)$$

trong đó $\bar{Q} = S^{-1/2} Q S^{-1/2}$, $s_1 = \lambda_{\min}(\bar{Q})$, $s_2 = \lambda_{\max}(\bar{Q})$.

Tiếp theo, chúng ta sẽ chỉ ra một điều kiện đủ cho tính thụ động hữu hạn của hệ (2.1).

Định lý 2.7.

Cho trước các hằng số dương c_1, c_2 ($c_2 \geq c_1$), T , và ma trận đối xứng xác định dương S . Giả sử GT1 và GT2 thỏa mãn. Khi đó, Hệ (2.1) là ổn định vững hữu hạn tương ứng với (c_1, c_2, T, S, d) , nếu tồn tại ma trận đối xứng xác định dương Q và các hằng số thực dương $v_1, v_2, v, \varepsilon, \gamma$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & Q & (QW-M^T) & QE_a & QE_w \\ * & -vI & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & -v_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -v_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.16)$$

$$c_1 s_2 + \frac{\varepsilon(1-\alpha)d}{B(\alpha)} + \frac{\varepsilon\alpha d}{B(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha \leq s_1 c_2. \quad (2.18)$$

trong đó $\bar{Q} = S^{-1/2} Q S^{-1/2}$, $s_1 = \lambda_{\min}(\bar{Q})$, $s_2 = \lambda_{\max}(\bar{Q})$.

Chứng minh.

Để chứng minh Định lý 2.7, chúng ta chọn hàm toàn phương như chứng minh của Định Lý 2.5 và biểu diễn được

$${}^{ABC}D_t^\alpha (V(t)) - 2z(t)^T \omega(t) - \gamma \omega(t)^T \omega(t) \leq \xi(t)^T H \xi(t), \quad (2.19)$$

trong đó

- $\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ f(\cdot) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} H_{11} & Q & QW-M^T \\ * & -vI & 0 \\ * & * & H_{33} \end{bmatrix}$,
- $H_{11} = QA + A^T Q + v_1^{-1} QE_a E_a^T Q + v_1 H_a^T H_a + v_2^{-1} QE_w E_w^T Q + v G_x^T G_x$,
- $H_{33} = -\varepsilon I + v_2 H_w^T H_w + v G_w^T G_w - (N + N^T + \gamma I)$.

Tiếp tục sử dụng Schur Complement, từ điều kiện (2.16), chúng ta thu được $H < 0$, và do đó với mọi t nằm trong $[0, T]$,

$${}^{ABC}D_t^\alpha (V(t)) \leq 2z(t)^T \omega(t) + \gamma \omega(t)^T \omega(t), \quad (2.20)$$

Lấy tích phân Atangana-Baleanu cả 2 vế của bất đẳng thức (2.20) từ 0 đến t , chúng ta có

$$x(t)^T Qx(t) - x(0)^T Qx(0) \leq {}^{AB}I_t^\alpha (2z(t)^T \omega(t) + \gamma \omega(t)^T \omega(t)). \quad (2.21)$$

Với điều kiện ban đầu là $x(0)=0$ và $x(t)^T Qx(t) \geq 0$, chúng ta thu được

$${}^{AB}I_t^\alpha (2z(t)^T \omega(t) + \gamma \omega(t)^T \omega(t)) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Từ đây,

$${}^{AB}I_t^\alpha (2z(t)^T \omega(t)) \geq -\gamma {}^{AB}I_t^\alpha (\omega(t)^T \omega(t)), \quad \forall t \in [0, T].$$

Nói cách khác, Hệ (2.1) là thụ động hữu hạn bền vững tương ứng với (c_1, c_2, T, S, d) .

Nhận xét 2.3

Mặc dù có nhiều kết quả thú vị về tính thụ động hữu hạn cho một vài hệ động lực cấp nguyên [45,46,47], nhưng các kết quả này không dễ để khái quát hóa và áp dụng cho các hệ cấp phân số ABC do giải tích cấp phân số ABC không có tính nửa nhóm. Bằng cách sử dụng lý thuyết ổn định hữu hạn và một vài tính chất của giải tích cấp phân số ABC, chương này trình bày bài toán này cho các hệ thống phi tuyến cấp phân số ABC lần đầu tiên. Và đây cũng chính là đóng góp quan trọng của kết quả này.

Nhận xét 2.4

Về mặt lý thuyết, LMI Toolbox trong MATLAB có thể giải một cách hiệu quả các LMI với số chiều bất kỳ. Tuy nhiên, khi kiểm tra tính khả thi của các LMI thu được, khi số lượng biến tăng lên sẽ dẫn đến việc tính toán trở nên phức tạp và thời gian tính toán sẽ lâu. Đây chính là nhược điểm của cách tiếp cận dựa trên LMI. Mặc dù vậy, với các kết quả chính của chương này việc tính toán khá rõ ràng và thuận tiện. Từ Định lý 2.7, thuật toán sau được đề xuất để tìm các nghiệm một cách khả thi:

Bước 1. Giải điều kiện (2.16) dựa trên LMI Toolbox để tìm các biến thực dương $v_1, v_2, v, \varepsilon, \gamma$ và ma trận đối xứng xác định dương Q .

Bước 2. Tính các đại lượng $\bar{Q} = S^{-1/2} Q S^{-1/2}$, $s_1 = \lambda_{\min}(\bar{Q})$, $s_2 = \lambda_{\max}(\bar{Q})$.

Bước 3. Kiểm tra điều kiện (2.17).

Ví dụ 1.11

Xét hệ (2.13) với các biến

$$\alpha = 0.5, A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mục đích của ví dụ này để so sánh với kết quả trong tài liệu [39], chúng tôi xem xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $c_1 = 1, T = 10, S = I, D = 0.2$, và $B(\alpha) \equiv 1$.

Sử dụng Hệ quả 2.6, hệ (2.13) ổn định vững tương ứng với mọi $c_2 \geq 3.5$. Trong khi đó, sử dụng Định lý 3 [39], giá trị nhỏ nhất $c_2 = 5.5$.

Trường hợp 2. $c_1 = 1, c_2 = 1, S = 1, D = 0.2$, và $B(\alpha) \equiv 1$.

Sử dụng Hệ quả 2.6, hệ (2.1) ổn định vững tương ứng với mọi $0 \leq T \leq 15$. Trong khi đó, sử dụng Định lý 3 [39], giá trị lớn nhất của T là 0.772.

Từ thảo luận trên, kết quả của chúng tôi là hiệu quả hơn và tốt hơn các kết quả đã có trong [39].

Ví dụ 1.12

Xét hệ (2.1) với các biến

$$\alpha = 0.5, A = \begin{bmatrix} -2 & 0.1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, E_a = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.06 \end{bmatrix}, H_a = [0.7 \quad 0.8], F_a(t) = \sin t,$$

$$E_w = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, H_w = [0.5], F_w(t) = \cos t,$$

$$M = [2 \quad 3], N = [0.5].$$

Nhiều phi tuyến $f(\cdot)$ thỏa mãn GT1 với $G_x = I, G_w = 1$.

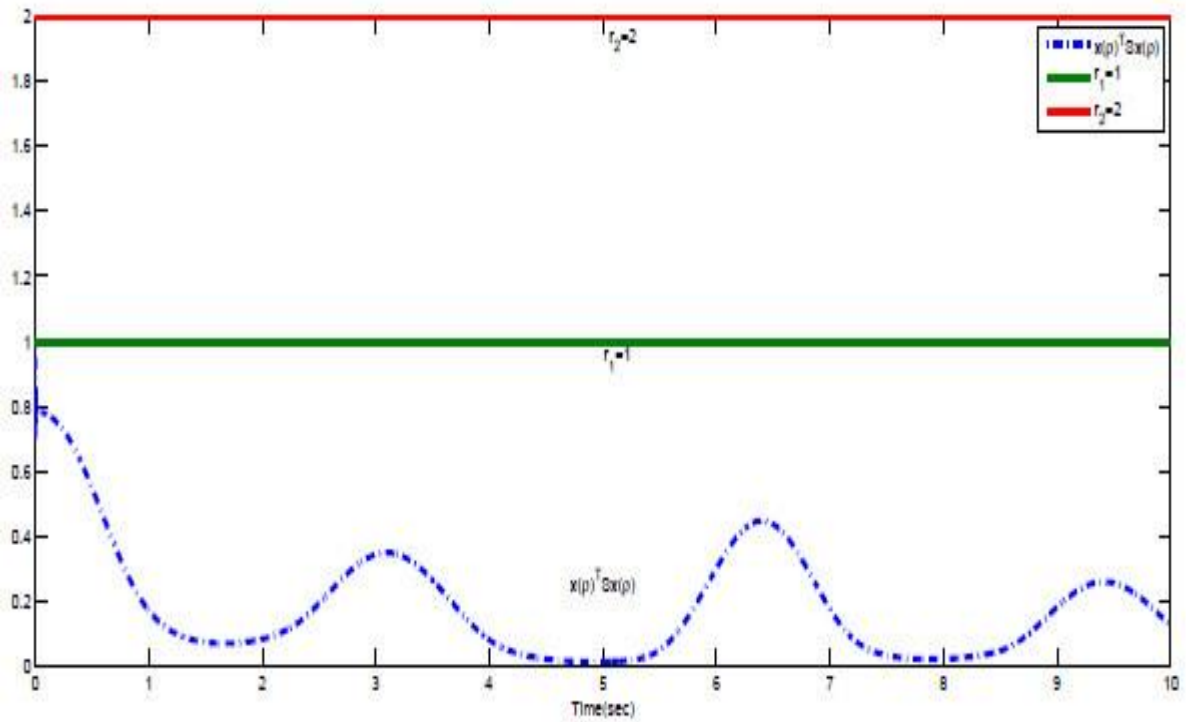
Nhiều đầu vào $\omega(t) = \sqrt{0.1} \cos 2t$, $d = 0.1$.

Với $c_1 = 1, c_2 = 2, T = 10, S = I$, và $B(\alpha) \equiv 1$. Sử dụng Nhận xét 2.4 và các LMIs (2.16) - (2.17) là khả thi với

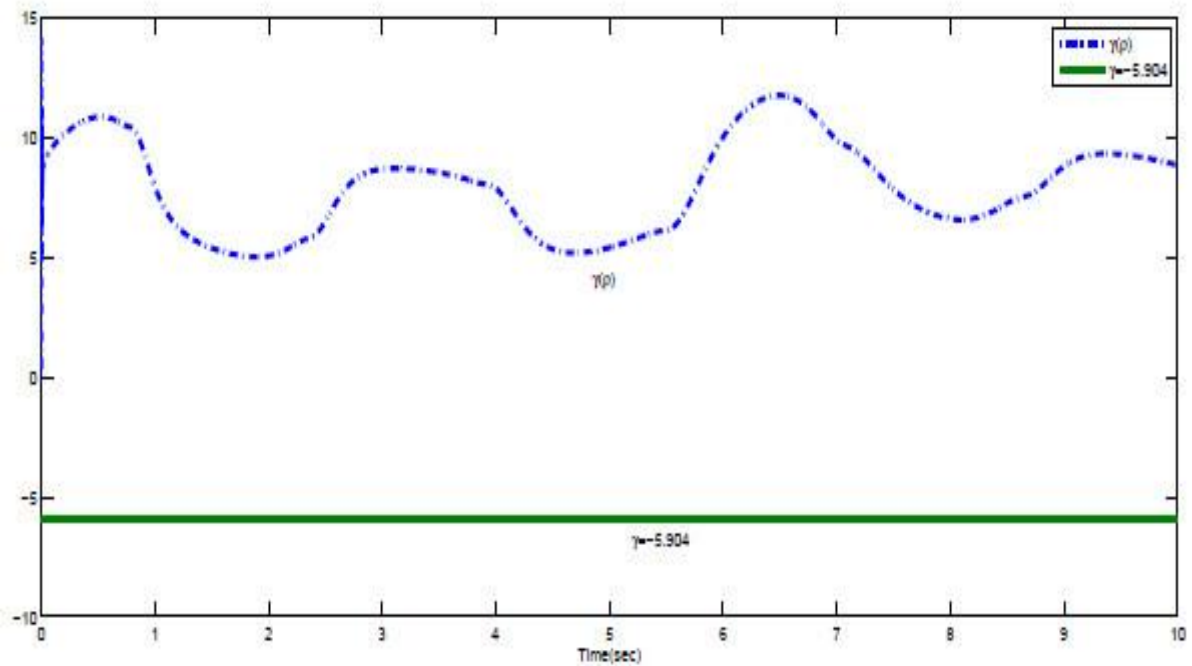
$$\gamma = 5.9004, \varepsilon = 5.9004, v_1 = 1.7493, v_2 = 8.4628,$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2.5773 & -0.0803 \\ -0.0803 & 2.3702 \end{bmatrix}.$$

Theo Định Lý 2.7, Hệ (2.1) là thụ động hữu hạn với tham số trên. Các hình vẽ sau mô tả tính chính xác của các kết quả chính.



Hình 1 với giá trị ban đầu $x_0 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix}$ mô tả quỹ đạo của $x(t)^T Sx(t)$.



Hình 2 mô tả quỹ đạo của hàm $\gamma(t) = \frac{{}^{AB}I_t^\alpha \left(2z(t)^T \omega(t) \right)}{{}^{AB}I_t^\alpha \left(\omega(t)^T \omega(t) \right)}$ với $-\gamma = -5.9004$

KẾT LUẬN CỦA CHƯƠNG 2.

Chương 2 nghiên cứu bài toán thụ động hữu hạn cho lớp hệ phi tuyến cấp phân số ABC. Đóng góp chính của các tác giả là giới thiệu định nghĩa mới của tính thụ động hữu hạn cho cá lớp hệ cấp phân số ABC và đưa ra một điều kiện đủ đảm bảo cho hệ thống là ổn định vững hữu hạn và thụ động hữu hạn. Hai ví dụ được đưa ra trong chương này nhằm so sánh và minh họa cho tính hiệu quả của các kết quả chính. Trong tương lai, chúng tôi sẽ mở rộng kết quả này cho nhiều lớp hệ khác nhau như hệ suy biến, hệ Neural có trễ, .v.v. Các kết quả của chương được đảm bảo bởi bài báo ISI chấp nhận đăng trên tạp chí Circuits, Systems, and Signal Processing, ISI-Q2 (2022).

KẾT LUẬN

Đề tài nghiên cứu tính ổn định của hệ cấp phân số có trễ. Các kết quả đạt được của hệ được đảm bảo bởi 3 bài báo (2 bài báo trong nước và 1 bài ISI) cụ thể:

- Một số điều kiện đủ cho tính ổn định vững hữu hạn của hệ phi tuyến cấp phân số có trễ và nhiễu
- Một số điều kiện đủ cho tính ổn định vững và thụ động hữu hạn của các lớp hệ cấp phân số Atangana-Baleanu-Caputo có nhiễu phi tuyến.
- Một vài kết quả mới về ước lượng tính bị chặn nghiệm bền vững cho hệ điều khiển ngẫu nhiên có bước nhảy Markovian rời rạc

Trong tương lai, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu bài toán này trên cơ sở mô hình hóa nhiều lớp hệ khác như lớp hệ cấp phân số suy biến, lớp hệ cấp phân số quy mô lớn và áp dụng nhiều hơn vào các ứng dụng thực tế.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Kiryakova, V., ‘Generalized fractional calculus and applications’ (Longman Group UK Limited, Essex, UK, 1994)
- [2] Podlubny, I., ‘Fractional differential equations’ (Academic Press, San Diego, 1999)
- [3] Kilbas, A.A., Srivastava, H., Trujillo, J.: ‘Theory and applications of fractional differential equations’ (Elsevier Science, Amsterdam, 2006)
- [4] Wang, J., Zhou, Y., Feckan, M., ‘Nonlinear impulsive problems for fractional differential equations and Ulam stability’, *Comput. Math. Appl.*, 2012, 64, pp. 3389–3405
- [5] Yang, H., Jiang, B., ‘Stability of fractional-order switched non-linear systems’, *IET Control Theory Appl.*, 2016, 10, pp. 965–970
- [6] Ge, F., Kou, C., ‘Stability analysis by Krasnoselskii fixed point theorem for nonlinear fractional differential equations’, *Appl. Math. Comput.*, 2015, 257, pp. 308–316
- [7] Mohammad Tavazoei Mohammad Hassan Asemani, ‘Robust stability analysis of incommensurate fractional-order systems with time-varying interval uncertainties’, *Journal of the Franklin Institute*, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2020.09.044>
- [8] Shiqi Zheng, Bingyun Liang, Feng Liu, Zichao Yang, Yuanlong Xie, ‘Robust stability of fractional order system with polynomial uncertainties based on sum-of-squares approach’, *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357, pp 8035-8058
- [9] Shuo Zhang, Lu Liu, Dingyu Xue, ‘Nyquist-based stability analysis of non-commensurate fractional-order delay systems’, *Applied Mathematics and Computation*, 2020, 377, 125111
- [10] Cong Wu, Xinzhi Liu, ‘Lyapunov and external stability of Caputo fractional order switching systems’, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2019, 34, pp 131-146.
- [11] Hui Li, Yonggui Kao, ‘Synchronous stability of the fractional-order discrete-time dynamical network system model with impulsive couplings’, *Neurocomputing*, 2019, 363, pp 205-211.
- [12] Ye, H., Gao, J., Ding, Y., ‘A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation’, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, 328, pp. 1075–1081

- [13] Lazarevi, M.P., Spasi, A.M., 'Finite-time stability analysis of fractional order time-delay systems: Gronwall's approach', *Math. Comput. Model.*, 2009, 49, pp. 475–481
- [14] Deng, W., Li, C., Lu, J., 'Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays', *Nonlinear Dyn.*, 2007, 48, pp. 409–416
- [15] Johnson, M.A., 'Stability of small periodic waves in fractional KdV-type equations', *SIAM J. Math. Anal.*, 2013, 45, pp. 3168–3193
- [16] Chen, Y., Moore, K.L., 'Analytical stability bound for a class of delayed fractional-order dynamic systems', *Nonlinear Dyn.*, 2002, 29, pp. 191–200
- [17] De la Sen, M., 'About robust stability of Caputo linear fractional dynamic systems with time delays through fixed point theory', *Fixed Point Theory Appl.*, 2011, 2011, ID 867932, pp. 1–19
- [18] Li, C.P., Zhang, F.R., 'A survey on the stability of fractional differential equations', *Eur. Phys. J., Spec. Top.*, 2011, 193, pp. 27–47
- [19] Cermak, J., Hornicek, J., Kisela, T., 'Stability regions for fractional differential systems with a time delay', *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2016, 31, pp. 108–123
- [20] Kaslik, E., Sivasundaram, S., 'Analytical and numerical methods for the stability analysis of linear fractional delay differential equations', *J. Comput. Appl. Math.*, 2012, 236, pp. 4027–4041
- [21] Hale, J.K., Verduyn Lunel, S.M., 'Introduction to functional differential equations' (Springer Science-Business Media, New York, 1993)
- [22] Erdelyi, A., 'Higher transcendental functions' (McGraw-Hill, New York, 1953).
- [23] Li, Y., Chen, Y.Q., Podlubny, I., 'Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Lefflers stability', *Comput. Math. Appl.*, 2010, 59, pp. 1810–1821
- [24] Baleanu, D., Sadati, S.J., Ghaderi, R., et al., 'Razumikhin stability theorem for fractional systems with delay', *Abs. Appl. Anal.*, 2010, 2010, ID 124812, pp. 1–9
- [25] Duarte-Mermoud, M.A., Aguila-Camacho, N., Gallegos, J.A., et al.: 'Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems', *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2015, 22, pp. 650–659

- [26] Sabatier, J., Moze, M., Farges, C., ‘LMI stability conditions for fractional order systems’, *Comput. Math. Appl.*, 2010, 59, pp. 1594–1609
- [27] Wen, Y., Zhou, X.F., Zhang, Z., et al., ‘Lyapunov method for nonlinear fractional differential systems with delay’, *Nonlinear Dyn.*, 2015, 74, pp. 1015–1025
- [28] Gao, Z., Liao, X., ‘Robust stability criterion of fractional-order functions for interval fractional-order systems’, *IET Control Theory Appl.*, 2013, 7, pp. 60–67
- [29] Agarwal, R., O'Regan, D., Hristova, S., et al., ‘Practical stability with respect to initial time difference for Caputo fractional differential equations’, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2017, 42, pp. 106–120
- [30] Thuan M.V., Niamsup P., Phat V. N., ‘Finite-Time Control Analysis of Nonlinear Fractional-Order Systems Subject to Disturbances’, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2020, 1-17
- [31] Thanh N.T., Phat V.N., Niamsup P., ‘New finite-time stability analysis of singular fractional differential equations with time-varying delay’, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2020, 23 (2), pp 504-519
- [32] Phat V.N., Thanh N.T., ‘New criteria for finite-time stability of nonlinear fractional-order delay systems: A Gronwall inequality approach’, *Applied Mathematics Letters*, 2018, 83, pp 169-175
- [33] Ke T.D., Quan N.N., ‘Finite-time attractivity for semilinear tempered fractional wave equations’, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2018, 21 (6), pp 1471-1492
- [34] Kinh C.T., Hien L.V., Ke T.D., ‘Power-Rate Synchronization of Fractional-Order Nonautonomous Neural Networks with Heterogeneous Proportional Delays’, *Neural Processing Letters*, 2018, 47, pp 139–151
- [35] Hua C., Zhang T., Li Y., Guan X., ‘Robust output feedback control for fractional-order nonlinear systems with time-varying delays’, *IEEE/CAA J. Auto. Sinica*, 2016, 3, pp 477–482
- [36] Zhang H., Ye R., Liu S., Cao J., Alsaedi A., Li X., ‘LMI-based approach to stability analysis for fractional-order neural networks with discrete and distributed delays’, *Int. J. Syst. Science*, 2018, 49, pp 537–545.
- [37] Zhang H., Ye R., Cao J., Ahmed A., Li X., Wan Y., ‘Lyapunov functional approach to stability analysis of Riemann-Liouville fractional neural networks with time-varying delays’, *Asian J. Control*, 2018, 20, pp 1–14.

- [38]. D. Baleanu, A. Fernandez, On some new properties of fractional derivatives with Mittag-Leffler kernel. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 59, 444–462 (2018)
- [39]. J. Sheng, W. Jiang, D. Pang, Finite-time stability of Atangana-Baleanu fractional-order linear systems. *Complexity*, 2020(Artical ID 1727358), 8 pages (2020)
- [40]. G.S. Teodoro, J.T. Machado, E.C. De Oliveira, A review of definitions of fractional derivatives and other operators. *Journal of Computational Physics*, 388, 195–208 (2019)
- [41]. A. Atangana, D. Baleanu, New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model. *Thermal Science* 20(2), 763–769 (2016)
- [42]. M. Caputo, M. Fabrizio, A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications* 2, 73–85 (2015)
- [43]. A. Giusti, A comment on some new definitions of fractional derivative. *Nonlinear Dynamics*, 93(3), 1757–1763 (2018)
- [44]. A. Gupta, S. Kumar, Design of Mittag-Leffler kernel-based fractional-order digital filter using fractional delay interpolation. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 41(6), 3415–3445 (2022)
- [45]. Y. Chen, L. Yang, A. Xue, Finite-time passivity of stochastic markov jump neural networks with random distributed delays and sensor nonlinearities. *Circuits, Systems, and Signal Processing* 38(6), 2422–2444 (2019)
- [46]. S. Rajavel, R. Samidurai, J. Cao, A. Alsaedi, B. Ahmad, Finite-time non-fragile passivity control for neural networks with time-varying delay. *Applied Mathematics and Computation* 297, 145–158 (2017)
- [47]. H. Wang, J. Zhao, Finite-time passivity of switched non-linear systems. *IET Control Theory & Applications* 12(3), 338–345 (2018)