

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT**

BÁO CÁO HỌC THUẬT

**ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH GIẢI CÁC BÀI
TOÁN OLYMPIC**

TS. PHẠM TUẤN CƯỜNG

Hà Nội , tháng 06/2025

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

**ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH GIẢI CÁC
BÀI TOÁN OLYMPIC**

Xác nhận của bộ môn

TÓM TẮT

Olympic toán Giải tích sinh viên là cuộc thi học thuật thường niên được tổ chức bởi Hội toán học Việt Nam và Bộ Giáo dục và Đào tạo dành cho sinh viên yêu toán trong cả nước. Cuộc thi góp phần quan trọng trong việc thúc đẩy phong trào dạy và học toán trong các trường Đại học và Cao đẳng. Tuy nhiên để sinh viên các trường không chuyên về toán có thể tiếp cận được với các bài tập trong đề thi Olympic là chuyện không hề dễ dàng nếu không có sự phân tích giảng dạy của các giảng viên có kinh nghiệm thực tế ôn luyện đội tuyển.

Trong báo cáo này chúng tôi trình bày một cách sáng tác bài toán Giải tích trong các kì thi Olympic toán toàn quốc nhằm giúp sinh viên không những nắm bắt được phương pháp giải mà còn giúp sinh viên rèn luyện được phương pháp suy nghĩ logic và tư duy sáng tạo trong các dạng bài toán giải tích mở rộng và tổng quát.

Từ khóa: Bài toán Giải tích, Đạo hàm, Vi phân, Tích phân.

1. Cho hàm f khả vi trên $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện $f(0)=0, f(1)=1$. Chứng minh rằng với $\alpha, \beta > 0$ tồn tại các số $c_1, c_2 \in (0,1), c_1 \neq c_2$ sao cho $\frac{\alpha}{f'(c_1)} + \frac{\beta}{f'(c_2)} = \alpha + \beta$.

Lời giải. Xét hàm $g(x) = f(x) - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}x$.

Dễ thấy $g(0) = -\frac{\alpha}{\alpha + \beta} < 0, g(1) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} > 0$.

Suy ra tồn tại số $c \in (0,1)$ để $g(c) = 0$, tức $f(c) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$.

Dùng định lý Lagrange cho hàm f trên $(0,c)$ thì tồn tại $c_1 \in (0,c)$ sao cho $f'(c_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} + \frac{\beta}{f'(c_2)} = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)c}$.

Dùng định lý Lagrange cho hàm f trên $(c,1)$ thì tồn tại $c_2 \in (c,1)$ sao cho $f'(c_2) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} + \frac{\beta}{f'(c_2)} = \frac{\beta}{(\alpha + \beta)(1 - c)}$.

Từ đó ta có $\frac{\alpha}{f'(c_1)} = (\alpha + \beta)c, \frac{\beta}{f'(c_2)} = (\alpha + \beta)(1 - c)$.

Từ đó dễ thấy $c_1, c_2 \in (0,1), c_1 \neq c_2$ và thỏa mãn điều phải chứng minh $\frac{\alpha}{f'(c_1)} + \frac{\beta}{f'(c_2)} = (\alpha + \beta)$.

+ Lấy $\beta = 1 - \alpha$ ta sẽ có bài thi OLP-2008 tại Nha Trang. (OLP-2008, Nha Trang). Cho hàm f liên tục trên $[0,1]$, khả vi trong $(0,1)$ và thỏa mãn $f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng với $\alpha \in (0,1)$ tồn tại các số $x_1, x_2 \in (0,1), x_1 \neq x_2$ sao cho $\frac{\alpha}{f'(x_1)} + \frac{1-\alpha}{f'(x_2)} = 1$.

Có thể mở rộng bài toán trên thành bài toán tổng quát như sau:

+ Cho hàm f khả vi trong $(0,1)$ và thỏa mãn $f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng với các số dương $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ cho trước, tồn tại các điểm phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_k \in [0,1]$ sao cho $\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{f'(x_k)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

+ Cho hàm f liên tục trên $[0,1]$, khả vi trong $(0,1)$ và thỏa mãn $f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại các điểm phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0,1]$ sao cho $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \dots + \frac{1}{f'(x_n)} = n$.

2. Cho hàm f liên tục trên $[a,b]$ khả vi trong (a,b) . Chứng minh rằng tồn tại $\alpha, \beta, \gamma \in (a,b)$ sao cho

$$f'(\alpha) = \frac{a+b}{4} \frac{f'(\beta)}{\beta} + \frac{a^2+ab+b^2}{6} \frac{f'(\gamma)}{\gamma^2}.$$

Lời giải. Theo định lý Lagrange với hàm $f(x)$ trên $[a,b]$ thì tồn tại $\alpha \in (a,b)$ sao cho $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dùng định lý Cauchy cho $f(x)$ và $g(x) = x^2$ trên $[a,b]$ thì tồn tại $\beta \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{f'(\beta)}{g'(\beta)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \text{hay} \quad \frac{f'(\beta)}{2\beta} = \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} \quad \text{nên suy ra} \quad f'(\alpha) = \frac{a+b}{2} \frac{f'(\beta)}{\beta}.$$

Dùng định lý Cauchy cho $f(x)$ và $h(x) = x^3$ trên $[a,b]$ thì tồn tại $\gamma \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{f'(\gamma)}{h'(\gamma)} = \frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)} \quad \text{hay} \quad \frac{f'(\gamma)}{3\gamma^2} = \frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3} \quad \text{nên suy ra} \quad f'(\alpha) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \frac{f'(\gamma)}{\gamma^2}.$$

Từ đó ta thu được điều cần phải chứng minh.

+ Lấy $[a,b] \equiv [0,1]$ ta sẽ thu được bài toán của kỳ thi OLP-2015 tại Hết.

(OLP-2015, Hết) Cho hàm số $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $x_1, x_2, x_3 \in (0,1)$ sao cho $f'(x_3) = \frac{f'(x_1)}{4x_1} + \frac{f'(x_2)}{x_2^2}$.

3. Cho hàm $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx$.

a) Chứng minh rằng tồn tại điểm $\alpha \in (0,1)$ sao cho $\int_0^\alpha f(x) dx = 0$. Từ đó suy ra với

mỗi số thực $a \in \mathbb{R}$ tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $f(c) = a \int_0^c f(x) dx$.

b) Chứng minh rằng với mỗi số thực $a \in \mathbb{R}$ tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $cf(c) + a \int_0^c f(x) dx = 0$.

Lời giải:

a) Xét hàm $g(t) = t \int_0^t f(x) dx - \int_0^t xf(x) dx, t \in [0,1]$.

Ta có $g(0) = g(1) = 0$ và $g'(t) = \int_0^t f(x) dx$.

Theo định lý Rolle tồn tại $\alpha \in (0,1)$ sao cho $g'(\alpha) = 0$ hay $\int_0^\alpha f(x) dx = 0$. Lại xét hàm

$h(t) = e^{-at} \int_0^t f(x) dx, t \in [0,1]$.

Ta có $h(0) = h(\alpha) = 0$ và $h'(t) = e^{-at} \left[f(t) - a \int_0^t f(x) dx \right]$.

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0, \alpha) \subset (0,1)$ sao cho $h'(c) = 0$ hay $f(c) = a \int_0^c f(x) dx$.

b) Xét hàm số $F(x) = \int_0^x f(t) dt, x \in [0,1]$. Ta có $F(0) = 0$ và $F'(x) = f(x)$ và

$$F(1) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf'(x) dx = \int_0^1 xF''(x) dx = xF'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 F'(x) dx = F(1) - \int_0^1 F'(x) dx$$

Do đó $\int_0^1 F(x) dx = 0$. (*)

Hàm số $F(x)$ liên tục trên $[0,1]$. Ta nhận thấy $F(x) > 0, \forall x \in (0,1)$ thì $\int_0^1 F(x) dx > 0$,

nếu $F(x) < 0, \forall x \in (0,1)$ thì $\int_0^1 F(x) dx < 0$, đều trái với (*).

Do đó phải tồn tại điểm $b \in (0,1)$ để $F(b) = 0$.

Lại xét hàm số $g(x) = x^\alpha F(x)$. Ta có $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1} F(x) + x^\alpha f(x)$ và $g(0) = g(b) = 0$. Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0,b) \subset (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$. Từ đó $\alpha c^{\alpha-1} \int_0^c f(x) dx + c^\alpha f(c) = 0$

hay $cf(c) + a \int_0^c f(x) dx = 0$.

+ Chọn các giá trị a thích hợp ta sẽ được các bài thi Olympic.

4. Cho hàm $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx$. Chứng minh rằng mỗi số thực $a \in \mathbb{R}$ tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho $f(c) = af'(c) \int_0^c f(x) dx$.

Lời giải: Xét hàm số $g(t) = e^{-at} \int_0^t f(x) dx, t \in [0,1]$. Theo bài 3 tồn tại $\alpha \in (0,1)$ để $\int_0^\alpha f(x) dx = 0$.

Ta có $g(0) = g(\alpha) = 0$ và $g'(t) = e^{-at} \left[f(t) + a \int_0^t f(x) dx \right]$.

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0, \alpha) \subset (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh $f(c) = af'(c) \int_0^c f(x) dx$.

+ Chọn a thích hợp sẽ được các bài thi Olympic. Chẳng hạn chọn $a=2018$ là bài thi OLP-2018 (bảng A) tại Quảng Bình

5. Cho hàm $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi và thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = k$.

Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 6k$.

Lời giải: Xét hàm số $g(x) = 6kx - 2k$. Dễ dàng thấy $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 xg(x) dx = k$.

Suy ra $\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = 0$. Hàm $h(x) = f(x) - g(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và có tích phân

$\int_0^1 h(x) dx = 0$ nên không thể xảy ra trường hợp $h(x) > 0, \forall x \in (0,1)$ hoặc trường hợp $h(x) < 0, \forall x \in (0,1)$.

Như vậy phương trình $h(x) = 0$ phải có ít nhất một nghiệm trong $(0,1)$.

Giả sử rằng $h(x) = 0$ chỉ có một nghiệm $x = a \in (0,1)$. Xảy ra hai khả năng sau:

i) Nếu $h(x) < 0, \forall x \in (0,a)$, thì $h(x) > 0, \forall x \in (a,1)$. Khi đó

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf(x) dx - k &= \int_0^1 xf(x) dx - \int_0^1 xg(x) dx = \int_0^1 x[f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_0^1 xh(x) dx = \int_0^a xh(x) dx + \int_a^1 xh(x) dx > \int_0^a ah(x) dx + \int_a^1 ah(x) dx \\ &= a \left[\int_0^a h(x) dx + \int_a^1 h(x) dx \right] = a \int_0^1 h(x) dx = 0. \text{ Suy ra } \int_0^1 xf(x) dx > k, \text{ mâu thuẫn với giả thiết của} \\ &\text{đầu bài!} \end{aligned}$$

ii) Nếu $h(x) > 0, \forall x \in (0, a)$, thì $h(x) < 0, \forall x \in (a, 1)$. Khi đó

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf'(x) dx - k &= \int_0^1 xf'(x) dx - \int_0^1 xg(x) dx = \int_0^1 x[f'(x) - g(x)] dx \\ &= \int_0^1 xh(x) dx = \int_0^a xh(x) dx + \int_a^1 xh(x) dx < \int_0^a ah(x) dx + \int_a^1 ah(x) dx \\ &= a \left[\int_0^a h(x) dx + \int_a^1 h(x) dx \right] = a \int_0^1 h(x) dx = 0. \text{ Suy ra } \int_0^1 xf'(x) dx < k, \text{ mâu thuẫn với giả thiết của} \\ &\text{đầu bài!} \end{aligned}$$

Như vậy phương trình $h(x) = 0$ phải có ít nhất hai nghiệm trong $(0, 1)$. Giả sử rằng $h(x) = 0$ chỉ có hai nghiệm $a, b \in (0, 1)$ $a < b$. Theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (a, b) \subset (0, 1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 6k.$$

+ Chọn k thích hợp sẽ được các bài thi Olympic. Chẳng hạn chọn $k=1$ là bài thi OLP-2010 tại Huế.

6. Cho hàm $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ khả tích với $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf'(x) dx = k$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq 4k^2.$$

Lời giải: Xét hàm số $g(x) = 6kx - 2k$. Ta có $\int_0^1 [f(x) - g(x)]^2 dx \geq 0$. Mặt khác

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x) - g(x)]^2 dx &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 [g(x)]^2 dx \\ &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 f(x)[6kx - 2k] dx + \int_0^1 [6kx - 2k]^2 dx \\ &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 12k \int_0^1 xf'(x) dx + 4k \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 (36k^2x^2 - 24k^2x + 4k^2) dx = \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 4k^2. \end{aligned}$$

Như vậy ta có $\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq 4k^2$.

+ Chọn k thích hợp sẽ được các bài thi Olympic. Chẳng hạn chọn $k=1$ là bài thi OLP-2004 của Kiev.

Tài liệu tham khảo

[1]. Hội Toán học Việt Nam. *Tuyển tập và Kỹ yếu thi Olympic Toán sinh viên từ năm 1993 đến nay*.

[2]. Nguyễn Văn Mậu, Lê Ngọc Lăng, Phạm Thế Long, Nguyễn Minh Tuấn. *Tuyển tập Olympic Toán sinh viên toàn quốc 1993 - 2005*. Hà Nội 2006.

[3]. Vũ Tiến Việt. *Tài liệu ôn tập Olympic Toán sinh viên*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2017.

[4]. Vũ Tiến Việt (chủ biên), Phan Thế Hải.

Một số chuyên đề ôn tập thi Olympic Toán sinh viên - Phần 2. Giải tích. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2021

ABSTRAC

Student Calculus Math Olympiad is an annual academic competition organized by the Vietnam Mathematical Association and the Ministry of Education and Training for students who love math throughout the country. The contest makes an important contribution to promoting the movement of teaching and learning mathematics in universities and colleges. However, it is not easy for students of non-math schools to be able to access the exercises in the Olympic exam without the teaching analysis of instructors with practical experience in team training. recruitment.

In this paper, we present a way to compose Calculus problems in the national math Olympiads to help students not only grasp the solution method but also help them practice logical thinking and Creative thinking in general

Keywords: *Calculus problem, Derivative, Differential, Integral.*