

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT**

BÁO CÁO HỌC THUẬT

**ĐỒ THỊ PHẪNG
VÀ CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ**

Th.S. Hà Hữu Cao Trình

Hà Nội, 6/2025

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT**

BÁO CÁO HỌC THUẬT

**ĐỒ THỊ PHẪNG
VÀ CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ**

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội, 6/2025

MỤC LỤC

1. MỞ ĐẦU	4
2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT	5
2.1. Đơn đồ thị vô hướng hữu hạn	5
2.2. Đồ thị đẳng cấu và đồ thị con	6
2.3. Đường đi và chu trình	7
2.4. Đồ thị liên thông	8
2.5. Một số loại đồ thị thường gặp	10
3. ĐỒ THỊ PHẪNG VÀ CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ	13
3.1. Đồ thị phẳng	13
3.2. Một số bài toán thực tế	15
3.3. Bài toán tô màu đỉnh	16
3.4. Tô màu bản đồ	18
4. KẾT LUẬN	21
TÀI LIỆU THAM KHẢO	22

1. MỞ ĐẦU

Lý thuyết đồ thị phát triển mạnh mẽ từ thế kỷ XVIII, khởi nguồn từ bài toán bảy cây cầu ở Königsberg do Leonhard Euler đề xuất, ví dụ đầu tiên minh họa cho việc trừu tượng hoá một bài toán thực tiễn thành mô hình đồ thị, từ đó đặt nền móng cho sự hình thành và phát triển của lý thuyết. Qua hơn hai thế kỷ, lý thuyết đồ thị không ngừng mở rộng cả về lý thuyết lẫn phạm vi ứng dụng, từ toán học thuần túy đến khoa học máy tính, kỹ thuật điện tử, sinh học, xã hội học và nhiều lĩnh vực liên ngành khác.

Một lớp đồ thị đặc biệt đóng vai trò quan trọng trong là đồ thị phẳng (planar graph). Đồ thị phẳng là những đồ thị có thể được vẽ trên mặt phẳng mà không có hai cạnh nào cắt nhau. Tính chất này không chỉ mang tính hình học trực quan mà còn gắn liền với nhiều kết quả cơ bản trong tô pô tổ hợp, lý thuyết tô màu, thiết kế mạch điện, và hình học rời rạc. Các định lý cổ điển như định lý Euler cho đồ thị phẳng và định lý bốn màu đều xuất phát từ việc nghiên cứu lớp đồ thị đặc biệt này.

Trong thực tiễn, đồ thị phẳng được ứng dụng rộng rãi trong nhiều bài toán thiết kế như lập sơ đồ mạch, quy hoạch đô thị, xây dựng bản đồ, phân tích mạng giao thông, ... Các thuật toán xử lý đồ thị phẳng thường có độ phức tạp thấp hơn so với đồ thị tổng quát, do đó cho phép giải quyết hiệu quả nhiều bài toán khó.

Báo cáo này nhằm cung cấp một cái nhìn toàn diện về đồ thị phẳng, từ cơ sở lý thuyết đến ứng dụng. Nội dung sẽ đi từ các định nghĩa cơ bản, các loại đồ thị phổ biến, các định lý nền tảng, đến những tính chất đặc trưng và bài toán thực tiễn liên quan đến đồ thị phẳng.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1. Đơn đồ thị vô hướng hữu hạn

Định nghĩa. Một đơn đồ thị vô hướng hữu hạn, thường kí hiệu là G , gồm một cặp tập hợp (V, E) trong đó: V là tập hữu hạn khác rỗng, và mỗi phần tử của E là một tập con gồm hai phần tử của V .

Thực quan hóa, mỗi phần tử của V được mô tả bởi một điểm trong không gian. Mỗi điểm này được gọi là một đỉnh, như vậy V là tập đỉnh.

Mỗi phần tử của E được mô tả bởi một đoạn thẳng hoặc đoạn cong nối hai điểm. Mỗi đoạn thẳng hay đoạn cong này được gọi là một cạnh. Như vậy E là tập cạnh. Giữa hai đỉnh có tối đa một cạnh.

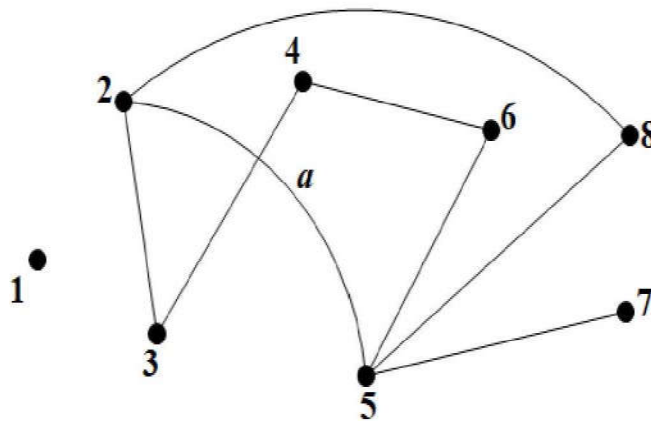
Số đỉnh của đồ thị được gọi là cấp của đồ thị. Số cạnh của đồ thị được gọi là cỡ của đồ thị.

Ví dụ. Xét đồ thị $G = (V, E)$ trong đó

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$E = \{\{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 8\}, \{3, 4\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}\}$$

Đồ thị G có cấp bằng 8 và có cỡ cũng bằng 8. Dưới đây là minh họa của đồ thị.



Với đơn đồ thị, khi không có sự nhầm lẫn, ta có thể kí hiệu cạnh $\{x, y\}$ đơn giản bởi xy hoặc yx . Nếu hai đỉnh x, y được nối bởi một cạnh thì ta nói x, y là hai đỉnh kề nhau. Nếu

đỉnh x là đầu mút của một cạnh a thì ta nói đỉnh x và cạnh a là liên thuộc nhau. Nếu hai cạnh a và b cùng liên thuộc với một đỉnh x thì ta cũng nói hai cạnh a, b là kề nhau.

Chẳng hạn trong hình 1.3, đỉnh 2 và đỉnh 5 kề nhau, đỉnh 2 và cạnh a liên thuộc nhau, cạnh a và cạnh 57 là kề nhau.

Định nghĩa. Trong đồ thị G , với mỗi đỉnh x , tập láng giềng của x , kí hiệu $N(x)$, là tập tất cả các đỉnh y kề với x . Tập các đỉnh khác x và không kề với x được kí hiệu là $N^c(x)$.

Trong hình ta có $N(5) = \{2, 6, 7, 8\}$, $N^c(5) = \{1, 3, 4\}$.

Định nghĩa. Trong đồ thị G cấp n , bậc của của một đỉnh x , kí hiệu $\deg(x)$, là số cạnh liên thuộc với x .

Một đỉnh có bậc bằng 0 được gọi là đỉnh cô lập, một đỉnh có bậc bằng 1 được gọi là đỉnh treo, một đỉnh có bậc bằng $n - 1$ được gọi là đỉnh phổ quát. Ngoài ra ta cũng ký hiệu:

$$\Delta(G) = \max\{\deg(x) \mid x \in V\}$$

$$\delta(G) = \min\{\deg(x) \mid x \in V\}$$

Trong hình, $\deg(5) = 4$, đỉnh 1 là đỉnh cô lập, đỉnh 7 là đỉnh treo, và đồ thị không có đỉnh phổ quát. Ngoài ra ta cũng có $\Delta(G) = 4$, $\delta(G) = 0$.

Định lý. Cho đồ thị $G = (V, E)$, tổng bậc của tất cả các đỉnh trong G bằng hai lần số cạnh.

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2|E|.$$

Từ đó, số đỉnh bậc lẻ trong G phải là số chẵn.

Chú ý rằng vế phải là số chẵn, do đó số các số hạng lẻ trong vế trái phải chẵn, tức là số đỉnh bậc lẻ trong G phải là số chẵn.

Trong hình ta có

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 0 + 3 + 2 + 2 + 4 + 2 + 1 + 2 = 16$$

$$2|E| = 2 \cdot 8 = 16$$

Định lý. Cho đồ thị $G = (V, E)$, khi đó

$$\sum_{xy \in E} (\deg(x) + \deg(y)) = \sum_{x \in V} \deg^2(x).$$

Trong hình 1.3 ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{xy \in E} (\deg(x) + \deg(y)) \\ &= (3 + 2) + (3 + 4) + (3 + 2) + (2 + 2) + (2 + 2) + (4 + 2) + (4 + 1) + (4 + 2) = \\ & 42, \end{aligned}$$

$$\sum_{x \in V} \deg^2(x) = 0^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 = 42$$

2.2. Đồ thị đẳng cấu và đồ thị con

Định nghĩa. Đồ thị $G = (V_G, E_G)$ và đồ thị $H = (V_H, E_H)$ được gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại một song ánh $f: V_G \rightarrow V_H$ thỏa mãn $\{x, y\} \in E_G$ khi và chỉ khi $\{f(x), f(y)\} \in E_H$.

Về mặt hình học, ta có thể thay đổi vị trí các đỉnh, và đánh dấu các cạnh của đồ thị G để thu được đồ thị H .

Định nghĩa. Cho đồ thị $G = (V, E)$ và tập đỉnh khác rỗng $A \subset V$. Đồ thị con của G cảm sinh bởi A là đồ thị có tập đỉnh là A và tập cạnh là tất cả các cạnh trong G chỉ liên thuộc với các đỉnh trong A .

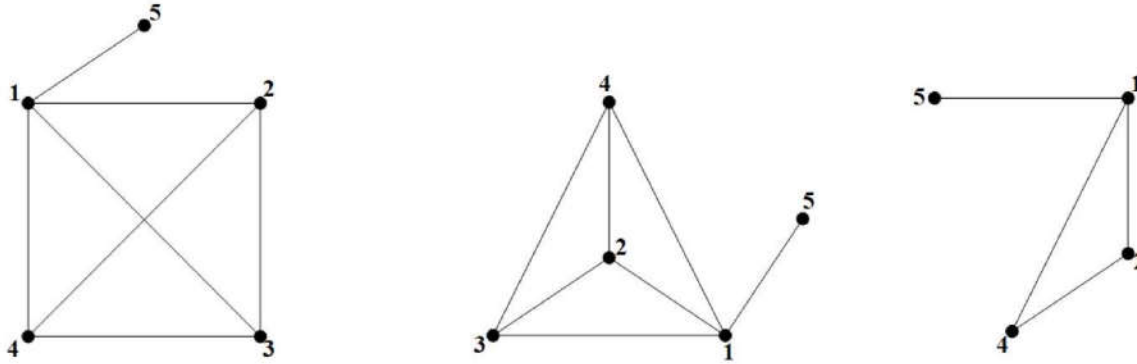
Chú ý rằng, khái niệm đồ thị con cảm sinh cũng được hiểu theo nghĩa sai khác một đẳng cấu.

Định nghĩa. Cho đồ thị $G = (V_G, E_G)$, đồ thị $H = (V_H, E_H)$ được gọi là đồ thị con của G nếu thỏa mãn các điều kiện:

1. $V_H \subset V_G$,
2. $E_H \subset E_G$.

Do H cũng là đồ thị nên các cạnh trong E_H chỉ liên thuộc với đỉnh trong V_H , tuy nhiên E_H không nhất thiết là tập tất cả các cạnh chỉ liên thuộc với đỉnh trong V_H .

Ví dụ. Ta xét ba đồ thị sau:



Dựa vào cách đánh số cho các đỉnh, ta thấy đồ thị bên trái đẳng cấu với đồ thị ở giữa. Đồ thị bên phải là đồ thị con cảm sinh của hai đồ thị còn lại. Ngoài ra nếu ta vẫn chọn tập đỉnh $\{1, 2, 4, 5\}$ nhưng chỉ chọn tập cạnh $\{51, 12, 24\}$ thì ta có một đồ thị con, nhưng không phải là đồ thị con cảm sinh.

2.3. Đường đi và chu trình

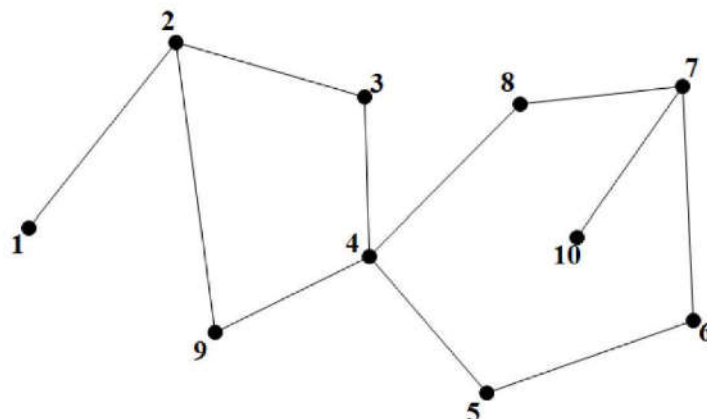
Định nghĩa. Một đường đi trong đồ thị G là một dãy đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_k$, với $k \geq 1$, sao cho $x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{k-1}x_k$ là các cạnh phân biệt. Số cạnh trong đường đi được gọi là độ dài của đường đi đó.

Khi không có sự nhầm lẫn, ta có thể viết đường đi dưới dạng $x_1x_2 \dots x_k$. Đường đi có các đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_k$ phân biệt được gọi là đường đi đơn. Đường đi đơn gồm có k đỉnh được kí hiệu là P_k . Một đường đi bất kì luôn có thể chia thành các đường đi đơn.

Định nghĩa. Một chu trình trong đồ thị G là một dãy đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_k$, với $k \geq 3$, sao cho $x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_kx_1$ là các cạnh phân biệt. Số cạnh trong chu trình được gọi là độ dài của chu trình đó.

Khi không có sự nhầm lẫn, ta có thể viết chu trình dưới dạng $x_1x_2 \dots x_kx_1$. Chu trình có các đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_k$ phân biệt được gọi là chu trình đơn. Chu trình đơn gồm có k đỉnh được kí hiệu là C_k . Một chu trình bất kì luôn có thể chia thành các chu trình đơn.

Ví dụ. Xét đồ thị G như sau:



Trong đồ thị ta có đường đi 1234876549 độ dài 9, đây không phải là đường đi đơn, tuy nhiên có thể tách thành hai đường đi đơn là 1234876 và 6549.

Đồ thị này cũng có chu trình 2345678492 độ dài 9, đây không phải là chu trình đơn, tuy nhiên có thể tách thành hai chu trình đơn là 23492 và 456784.

Định lý. Cho đồ thị G cấp $n \geq 3$.

1. Nếu bậc mỗi đỉnh của G đều ít nhất là 2 thì G có chu trình.
2. Nếu số cạnh của G ít nhất là n thì G cũng có chu trình.

2.4. Đồ thị liên thông

Định nghĩa. Trong đồ thị G , hai đỉnh phân biệt x và y được gọi là liên thông với nhau nếu tồn tại đường đi $xx_1x_2 \dots x_ky$, trong đó k là số tự nhiên. G được gọi là đồ thị liên thông nếu hai đỉnh phân biệt bất kì đều liên thông với nhau.

Định nghĩa. Cho đồ thị G , một thành phần liên thông của G là một đồ thị con cảm sinh của G , gọi là $H = (V_H, E_H)$, thỏa mãn:

1. H liên thông.

2. Nếu thêm một đỉnh x bất kì vào V_H thì đồ thị cảm sinh bởi tập đỉnh V_H mới không còn là đồ thị liên thông.

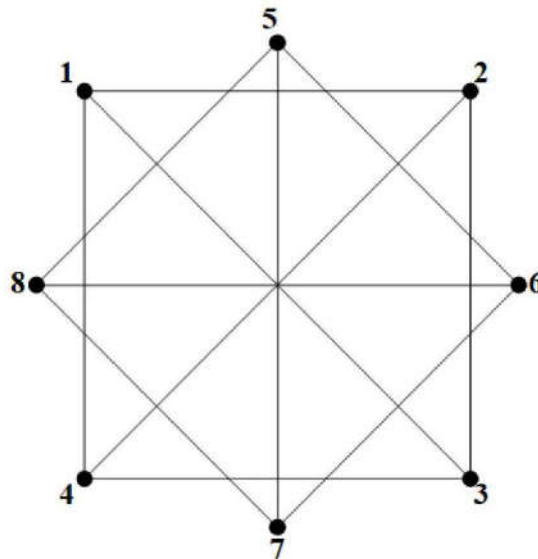
Như vậy một thành phần liên thông được hiểu là một đồ thị con cảm sinh tối đa, không thể bổ sung thêm đỉnh nào khác.

Định lý. Một đồ thị bất kì luôn có duy nhất một phân hoạch thành các thành phần liên thông.

Một đồ thị liên thông chỉ phân hoạch được thành một thành phần liên thông. Một đồ thị không liên thông sẽ phân hoạch thành ít nhất hai thành phần liên thông.

Mỗi đồ thị trong hình 1.4 đều là đồ thị liên thông, nhưng nếu ta kết hợp chúng lại thì được một đồ thị không liên thông. Đồ thị kết hợp này có ba thành phần liên thông.

Ví dụ. Đồ thị sau đây không liên thông. Đồ thị này có hai thành phần liên thông cảm sinh bởi lần lượt các tập đỉnh $\{1,2,3,4\}$ và $\{5,6,7,8\}$.



Định lý. Cho đồ thị G cấp n . Nếu G liên thông thì G có ít nhất $n - 1$ cạnh.

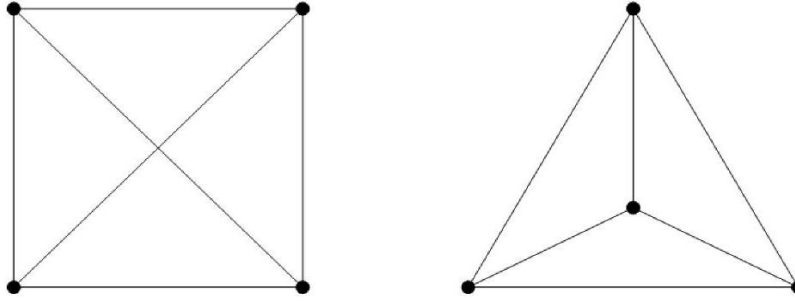
2.5. Một số loại đồ thị thường gặp

Định nghĩa. Đồ thị G được gọi là đồ thị rỗng nếu mỗi đỉnh của G đều là đỉnh cô lập.

Thuật ngữ rỗng tương ứng với tập cạnh của G là rỗng.

Định nghĩa. Cho số tự nhiên n , đồ thị đầy đủ cấp n , kí hiệu là K_n , là đồ thị có n đỉnh, và hai đỉnh bất kì đều kề nhau.

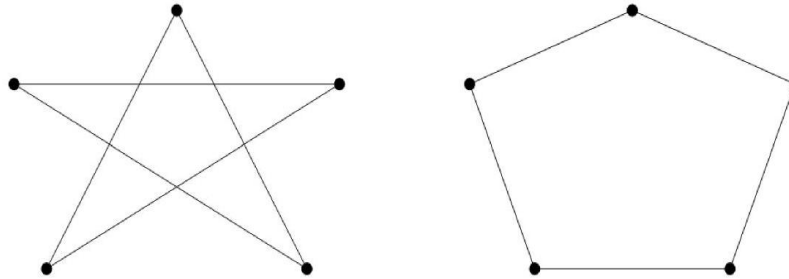
Đồ thị K_n có số cạnh là $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$.



Trong hình vẽ, cả hai đồ thị đều là (đẳng cấu với) K_4 .

Định nghĩa. Cho đồ thị $G = (V, E)$, đồ thị bù của G , kí hiệu là $G^c = (V, E^c)$ là đồ thị có cùng tập đỉnh với G thỏa mãn hai đỉnh x, y kề nhau trong G khi và chỉ khi x, y không kề nhau trong G^c .

Hợp của hai đồ thị bù nhau (giữ nguyên tập đỉnh, lấy hợp của tập cạnh) là một đồ thị đầy đủ. Đồ thị bù của đồ thị đầy đủ là đồ thị rỗng.



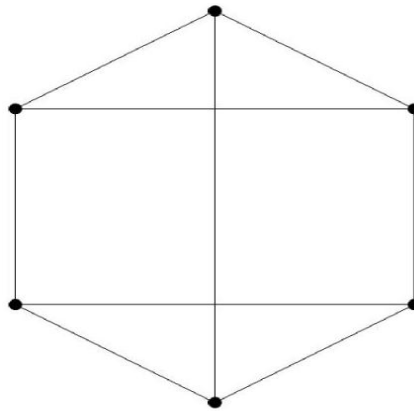
Ví dụ. Trong hình vẽ, hai đồ thị là đồ thị bù của nhau. Điểm đặc biệt là hai đồ thị này đều là C_5 .

Định nghĩa. Cho n là số nguyên lớn hơn 2, đồ thị bánh xe cấp $n+1$, kí hiệu là W_n , là đồ thị xây dựng từ chu trình đơn C_n , bổ sung thêm một đỉnh kề với tất cả các đỉnh trong C_n .

Ví dụ. Dễ thấy đồ thị W_3 chính là K_4 .

Định nghĩa. Cho số tự nhiên k , đồ thị G được gọi là đồ thị chính qui bậc k , hay k -chính qui nếu bậc của mỗi đỉnh trong G đều bằng k .

Đồ thị K_n hiển nhiên là $(n - 1)$ -chính qui. Đồ thị 0 -chính qui là đồ thị rỗng, đồ thị 1 chính qui là hợp của các K_2 (đồ thị đoạn thẳng) rời nhau, đồ thị 2-chính qui là hợp của các chu trình đơn rời nhau. Hình vẽ sau đây là một đồ thị 3-chính qui, hay còn gọi là đồ thị khối.



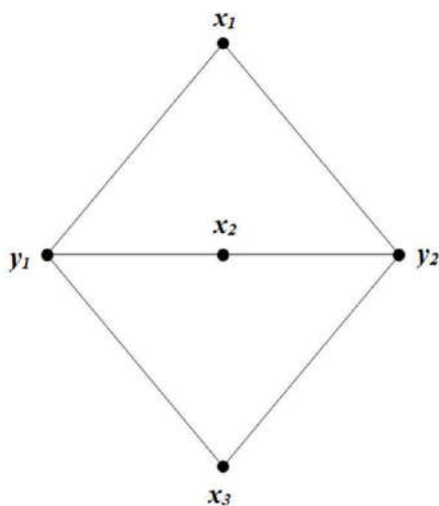
3. ĐỒ THỊ PHẪNG VÀ CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

3.1. Đồ thị phẳng

Định nghĩa. Đồ thị G được gọi là đồ thị phẳng nếu tồn tại cách vẽ G trên mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào của G cắt nhau.

Hai cạnh được gọi là cắt nhau trong mặt phẳng nếu chúng có điểm chung ở giữa mỗi cạnh, không tính các điểm đầu mút. Một cách vẽ thỏa mãn được gọi là một biểu diễn phẳng của G .

Ví dụ. Đồ thị $K_{2,3}$ là đồ thị phẳng nhưng đồ thị $K_{3,3}$ không là đồ thị phẳng.



Trong biểu diễn phẳng, nếu có, $G = (V, E)$ chia mặt phẳng thành một số miền, có thể hữu hạn, có thể vô hạn. Mỗi miền này được gọi là một mặt của đồ thị phẳng. Ta gọi số mặt là f . Đặt $v = |V|$ là số đỉnh và $e = |E|$ là số cạnh của đồ thị. Khi đó ta có định lý sau được chứng minh bởi Euler.

Định lý. Nếu G là đồ thị phẳng liên thông thì

$$v - e + f = 2.$$

Ngoài ra, với đồ thị G phẳng liên thông cấp 4 trở lên, mỗi mặt đều có ít nhất 3 cạnh, mỗi cạnh đều thuộc không quá hai mặt nên ta suy ra được $3f \leq 2e$. Từ đó, kết hợp với công thức Euler ta chứng minh được các kết quả.

Định lý. Cho G là đồ thị phẳng liên thông cấp lớn hơn 3. Khi đó:

1. Số cạnh $e \leq 3v - 6$.
2. G có một đỉnh với bậc không vượt quá 5.
3. Nếu G không có tam giác thì số cạnh $e \leq 2v - 4$.

Định lý trên có thể coi là điều kiện cần cho một đồ thị phẳng, được kiểm tra thông qua số cạnh và số đỉnh.

Đồ thị K_5 có $e = 10, v = 5$ không thỏa mãn điều kiện $e \leq 3v - 6$ nên K_5 không là đồ thị phẳng.

Đồ thị $K_{3,3}$ không có tam giác, có $e = 9, v = 6$ thỏa mãn điều kiện $e \leq 3v - 6$ nhưng không thỏa mãn điều kiện $e \leq 2v - 4$ nên suy ra $K_{3,3}$ không là đồ thị phẳng.

Hai đồ thị K_5 và $K_{3,3}$ là hai đồ thị không phẳng đơn giản nhất. Cụ thể:

1. Nếu xóa một đỉnh bất kì hoặc một cạnh bất kì của K_5 hoặc $K_{3,3}$ thì ta luôn có một đồ thị phẳng.
2. Đồ thị K_5 là đồ thị không phẳng ít đỉnh nhất.
3. Đồ thị $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng ít cạnh nhất,

Định nghĩa. Cho đồ thị G , một phép chia cạnh với G là một phép chọn một cạnh xy của G , xóa cạnh xy và thêm vào một đỉnh mới z và thêm vào hai cạnh mới xz, yz . Hai đồ thị được gọi là đồng phôi với nhau nếu chúng cùng thu được từ một đồ thị G ban đầu thông qua hữu hạn phép chia đỉnh.

Hai đồ thị đồng phôi là hai đồ thị có dạng hình học giống nhau theo nghĩa tô pô. Định lý sau đây là điều kiện cần và đủ của một đồ thị không phẳng, được chứng minh bởi Kuratowski.

Định lý. Một đồ thị là không phẳng khi và chỉ khi nó chứa một đồ thị con đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$.

3.2. Một số bài toán thực tế

Thiết kế mạch điện tử.

Trong ngành công nghiệp vi mạch, việc thiết kế bảng mạch in (PCB) yêu cầu các kết nối điện giữa các chân linh kiện phải được bố trí hợp lý trên mặt phẳng mạch. Nếu các kết nối này chồng chéo hoặc giao cắt nhau, nó có thể gây ra sự cố trong hoạt động của mạch hoặc tăng chi phí sản xuất do phải dùng nhiều lớp mạch hơn. Khi mô hình hóa mạch dưới dạng đồ thị, nếu đồ thị đó là phẳng thì có thể bố trí các dây dẫn mà không cần giao cắt, cho phép sử dụng PCB một lớp. Tính chất này giúp đơn giản hóa thiết kế, giảm thiểu rủi ro và tối ưu chi phí.

Quy hoạch mạng giao thông đô thị

Khi thiết kế mạng đường giao thông trong khu đô thị, mỗi giao lộ có thể được xem là một đỉnh, và các đoạn đường nối các đỉnh đó là các cạnh. Việc đảm bảo mạng lưới không có các giao cắt đường bộ trên cùng một mặt phẳng tương đương với việc kiểm tra tính phẳng của đồ thị. Nếu đồ thị giao thông là phẳng, ta có thể xây dựng mạng lưới không cần cầu vượt hoặc hầm chui, từ đó giảm đáng kể chi phí và thời gian thi công.

Thiết kế mạng cảm biến không dây (WSN)

Mạng cảm biến không dây thường được bố trí trong một khu vực cố định với giới hạn không gian. Mỗi cảm biến là một đỉnh, và hai cảm biến được nối cạnh nếu chúng nằm trong phạm vi kết nối với nhau. Nếu đồ thị phẳng, mạng có thể được thiết kế sao cho không có sự chồng lấn tín hiệu hoặc giao thoa, giúp tăng hiệu quả truyền thông và tiết kiệm năng lượng. Hơn nữa, mạng phẳng cũng dễ triển khai hơn trong các vùng có địa hình phức tạp như rừng hoặc thành phố đông đúc.

Sơ đồ tổ chức không rối

Trong các tổ chức, sơ đồ quản lý và mối quan hệ giữa các bộ phận có thể được mô hình hóa dưới dạng đồ thị. Một đồ thị phẳng giúp sơ đồ hiển thị trực quan, không có các đường nối chồng chéo gây rối mắt. Điều này đặc biệt quan trọng trong các hệ thống lớn, nơi việc truyền tải thông tin cần rõ ràng, dễ hiểu và tránh gây nhầm lẫn cho người xem.

Phân chia vùng quản lý hành chính

Việc quy hoạch và phân chia các vùng hành chính như quận, huyện, phường phải đảm bảo ranh giới rõ ràng và không chồng lấn. Khi mô hình hóa các vùng này dưới dạng đồ thị, mỗi vùng là một đỉnh, hai vùng tiếp giáp được nối bằng cạnh. Nếu đồ thị này là phẳng, ta có thể sử dụng tô màu để đánh dấu các vùng khác nhau dễ dàng trên bản đồ và bảo đảm không có sự xung đột về quản lý lãnh thổ.

Việc giải quyết các bài toán trên thông thường dẫn đến hai bài toán quan trọng, đó là tô màu đỉnh và tô màu bản đồ.

3.3. Bài toán tô màu đỉnh

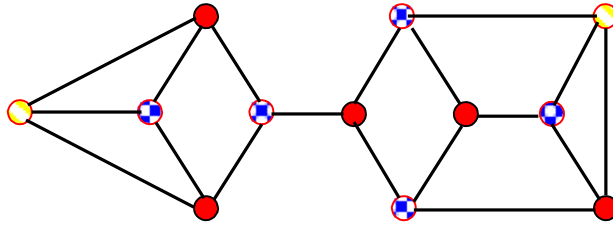
Định nghĩa. Cho đồ thị G , sắc số của G , kí hiệu là $\chi(G)$, là số màu ít nhất có thể tô cho các đỉnh của G , mỗi đỉnh một màu, sao cho hai đỉnh kề nhau luôn có màu khác nhau.

Bài toán được đặt ra là: số màu tối thiểu cần thiết để tô cho các đỉnh của một đồ thị sao cho hai đỉnh kề nhau thì có màu khác nhau là bao nhiêu? Một cách tô màu thỏa mãn được gọi là một cách *tô đúng*.

Định nghĩa. Ta nói một đồ thị là k -sắc tính nếu nó có thể tô đúng bằng k màu. Số màu tối thiểu cần thiết để tô đúng được các đỉnh của G , gọi là số sắc tính hay sắc số của đồ thị G và viết $\chi(G) = k$.

Rõ ràng, sắc số của đồ thị đầy đủ n đỉnh bằng n : $\chi(K_n) = n$. Vì vậy có các đồ thị với sắc số lớn tùy ý. Theo chiều ngược lại, $\chi(G) = 1$ khi và chỉ khi G là đồ thị không, tức là đồ thị G có đỉnh nhưng không có cạnh, và $\chi(G) = 2$ khi và chỉ khi G là một đồ thị hai phần khác không. Chú ý rằng một cây bất kỳ, cũng như mọi chu trình độ dài chẵn bất kỳ là 2-sắc tính.

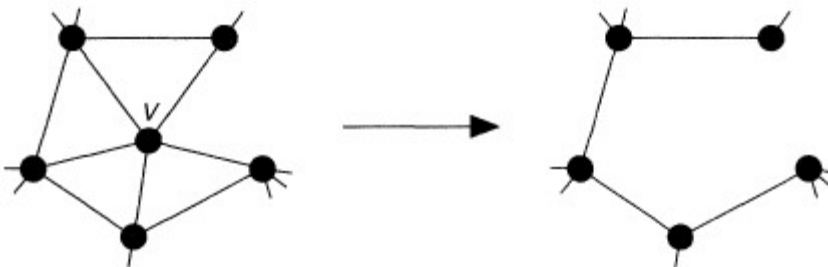
Ta có thể dễ dàng lấy ví dụ về đồ thị là 3-sắc tính. Chẳng hạn, các chu trình độ dài lẻ hay các đồ thị bánh xe với một số lẻ đỉnh và đồ thị Petersen là 3-sắc tính. Các đồ thị bánh xe với một số chẵn đỉnh là 4-sắc tính. Một lớp đồ thị phẳng 3-sắc tính đáng chú ý, đó là các đồ thị với $n \geq 6$ đỉnh và mọi đỉnh có bậc 3, ví dụ như đồ thị sau.



Định lý. Mọi đơn đồ thị phẳng là 6 - sắc tính.

Chứng minh. Hiển nhiên định lý đúng đối với các đơn đồ thị phẳng không quá 6 đỉnh. Giả sử G là một đơn đồ thị phẳng n đỉnh, và mọi đơn đồ thị phẳng $(n - 1)$ đỉnh là 6 - sắc tính. Do đồ thị G phẳng nên G chứa một đỉnh v có bậc nhiều nhất là 5. Nếu xóa v và các cạnh liên thuộc v thì đồ thị còn lại có $n - 1$ đỉnh, và vì vậy nó là 6 - sắc tính. Giữ nguyên màu của các đỉnh trong đồ thị này, ta tô cho đỉnh v bằng màu, khác với những màu đã tô cho các đỉnh kề v .

Kết quả là G được tô bằng 6 màu, tức G là 6 - sắc tính.



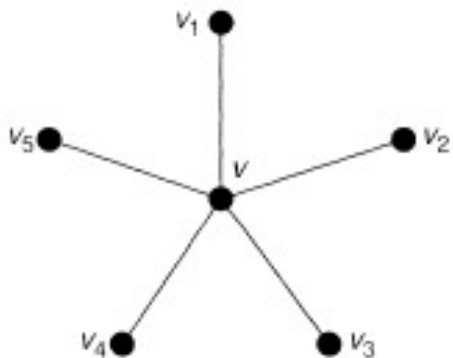
Định lý được làm mạnh hơn như sau.

Định lý. Một đơn đồ thị phẳng bao giờ cũng là 5 - sắc tính.

Chứng minh. Ta chứng minh định lý bằng phương pháp quy nạp theo số đỉnh. Hiển nhiên định lý đúng đối với đơn đồ thị phẳng ít hơn 6 đỉnh. Giả sử G là một đơn đồ thị phẳng n đỉnh, và mọi đơn đồ thị phẳng $n - 1$ đỉnh là 5 - sắc tính. Do đồ thị G phẳng nên G chứa một đỉnh v với bậc không quá 5. Sau khi xóa đỉnh v và các cạnh liên thuộc v , ta được một đơn đồ thị $n - 1$ đỉnh và đồ thị này là 5 - sắc tính. Mục đích của ta bây giờ là tô đỉnh v bằng một trong 5 màu này, và như vậy sẽ hoàn thành việc tô các đỉnh của G bằng 5 màu.

Nếu bậc của đỉnh v nhỏ hơn 5 thì v có thể được tô bằng màu bất kỳ, chưa dùng để tô cho các (tối đa là 4) đỉnh kề v , và như vậy hoàn thành chứng minh định lý trong trường hợp này. Giả sử bậc của v bằng 5 và 5 đỉnh kề v là $v_1, \dots, v_5$ được sắp xếp quanh v theo chiều kim đồng hồ. Nếu các đỉnh $v_1, \dots, v_5$ đôi một kề nhau thì G chứa đồ thị không phẳng K_5 như một đồ thị con, vô lý! Vậy phải có ít nhất 2 trong số các đỉnh v_i (chẳng hạn, v_1 và v_3) không kề nhau.

Bây giờ ta có hai cạnh vv_1 và vv_3 về đỉnh v , và nhận được một đồ thị phẳng có $n - 2$ đỉnh. Theo giả thiết quy nạp, ta có thể tô đúng nó bằng 5 màu. Sau khi tô đồ thị này, ta khôi phục trở lại hai cạnh ban đầu và tô cho v_1 và v_3 . bằng màu đã tô cho v , còn v thì tô bằng màu thứ 5 còn lại (ngoài những màu đã tô cho các đỉnh kề v). Kết quả là bao giờ ta cũng có thể tô cho các đỉnh của G bằng 5 màu, nghĩa là G là 5 - sắc tính.



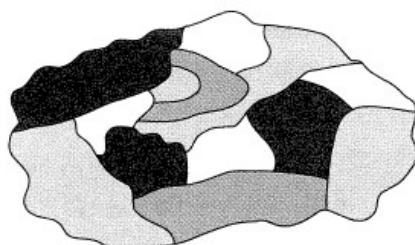
Định lý sau đây được chứng minh dựa vào sự trợ giúp của máy tính. Ta thường gọi là định lý bốn màu.

Định lý. Với mọi đồ thị phẳng G , thì $\chi(G) \leq 4$.

3.3. Tô màu bản đồ

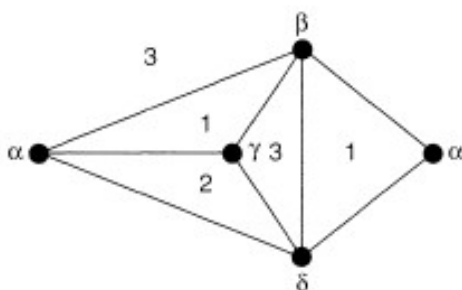
Đồ thị phẳng có ý nghĩa quan trọng trong các nghiên cứu về bản đồ, đặc biệt là tô màu bản đồ. Một bản đồ là một miền phẳng hữu hạn được chia thành nhiều vùng, giữa các vùng ngăn cách bởi đường biên giới. Yêu cầu đặt ra khi tô màu bản đồ là mỗi vùng được tô bởi một màu sao cho hai vùng có độ dài đường biên lớn hơn 0 phải có màu khác nhau.

Ta xây dựng đồ thị G với mỗi đỉnh là một vùng, hai đỉnh kề nhau ứng với hai vùng có độ dài đường biên giới ngăn cách chúng lớn hơn 0. Khi đó G là một đồ thị phẳng. Việc tô màu cho các vùng trở thành bài toán tô màu cho các đỉnh của một đồ thị phẳng, sao cho hai đỉnh kề nhau phải có màu khác nhau.



Cho trước một bản đồ địa lý gồm một số nước, câu hỏi đặt ra là: cần dùng ít nhất bao nhiêu màu để có thể tô cho mỗi nước một màu, sao cho hai nước có đường biên giới chung phải có màu khác nhau. Dạng gần gũi nhất với định lý bốn màu là mệnh đề nói rằng có thể tô mọi bản đồ địa lý chỉ bằng bốn màu. Chẳng hạn, hình sau vẽ một bản đồ được tô bằng bốn màu.

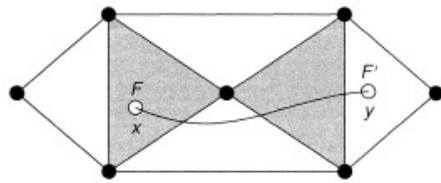
Ta nói một bản đồ là k -sắc tính diện nếu có thể tô các nước (diện) bằng k màu sao cho hai nước có đường biên giới (cạnh) chung được tô bằng hai màu khác nhau. Để tránh nhầm lẫn, ta dùng k -sắc tính đỉnh để chỉ k -sắc tính theo nghĩa tô các đỉnh. Chẳng hạn, bản đồ ở Hình 15 là 3-sắc tính diện và 4-sắc tính đỉnh.



Định lý. Bản đồ G là 2-sắc tính diện khi và chỉ khi mọi đỉnh của G có bậc chẵn.

Chứng minh. Với mỗi đỉnh v của G , số diện xung quanh v phải là số chẵn, bởi vì chúng được tô bằng 2 màu. Từ đó suy ra mọi đỉnh của G có bậc chẵn.

Ngược lại, Nếu mọi đỉnh của G có bậc chẵn thì ta sẽ tô các diện của G bằng 2 màu như sau: Chọn diện bất kỳ F và tô nó bằng màu đỏ. Vẽ một đường cong từ điểm x trong F tới điểm y trong diện khác F' và không đi qua đỉnh nào của G . Nếu đường cong đó đi qua một số chẵn cạnh thì tô màu đỏ cho diện chứa y . Nếu trái lại, tô màu xanh. Việc tô màu này được hoàn toàn xác định, vì có thể lấy một chu trình gồm hai đường như thế và chứng minh rằng chu trình đi qua một số chẵn cạnh của G , nhờ dựa trên sự kiện là mỗi đỉnh có một số chẵn cạnh liên thuộc nó.



4. KẾT LUẬN

Nội dung báo cáo này trình bày có hệ thống các kiến thức từ cơ bản đến nâng cao về lý thuyết đồ thị, đặc biệt là đồ thị phẳng, cũng như những ứng dụng quan trọng của nó vào các bài toán thực tiễn. Đồ thị phẳng được minh chứng là một công cụ mạnh mẽ để mô hình hóa và giải quyết các vấn đề thực tế như thiết kế mạch điện tử, tô màu bản đồ, quy hoạch giao thông, tổ chức mạng cảm biến không dây và lập lịch thi hợp lý.

Báo cáo cung cấp nền tảng khái niệm đồ thị đến các định lý then chốt như Euler, Kuratowski, và các bất đẳng thức liên quan đến số cạnh tối đa của đồ thị phẳng. Trên cơ sở đó, phần tiếp theo đi sâu vào các tính chất tô màu của đồ thị phẳng – đặc biệt là định lý 4 màu và 5 màu – không chỉ với mục đích lý thuyết mà còn kết nối chặt chẽ với bài toán thực tế như tô màu bản đồ địa lý.

Tuy nhiên, phạm vi báo cáo vẫn còn giới hạn. Một số chủ đề nâng cao chưa được khai thác sâu như thuật toán kiểm tra tính phẳng tuyến tính, tô màu cạnh, tô màu mặt, hay các hướng nghiên cứu mở về sắc số của đồ thị phẳng ngẫu nhiên.

Hy vọng rằng báo cáo này sẽ mang lại giá trị thiết thực cho các sinh viên đang học các học phần về toán rời rạc, lý thuyết đồ thị, khoa học máy tính hoặc kỹ thuật điện tử. Đồng thời, tài liệu cũng có thể hỗ trợ giảng viên trong việc minh họa giảng dạy, thiết kế bài tập, hoặc định hướng nghiên cứu cho sinh viên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Đặng Huy Ruận, *Lý thuyết đồ thị và ứng dụng*, NXB Khoa học tự nhiên, 2004.
- [2] Trần Quốc Chiến, *Giáo trình lý thuyết đồ thị và ứng dụng*, Đại học Đà Nẵng, 2007.
- [3] wikipedia.org và các nguồn internet.